

plan
cierpliwość
regularność
sukces ♡



EGZAMIN
TO TWÓJ KROK
DO CELU!
♡

Matma na Walizkach
— Agata Suliga —

WYPRAWKA ÓSMOKLASISTY

Twoja wiedza • Twój sukces ♡

MATEMATYCZNA CHECKLISTA

- ☒ liczby i działania
 - ☒ wyrażenia algebraiczne
 - ☒ równania i nierówności
 - ☒ procenty
 - ☒ potęgi i pierwiastki
 - ☒ geometria na płaszczyźnie
 - ☒ geometria w przestrzeni
 - ☒ statystyka
 - ☒ funkcje i zależności
- = SUKCES ♡



zrozum



zapamiętaj



ćwicz



osiągnij cel!

Małe kroki
prowadzą do
wielkich rzeczy
♡

PAMIĘTAJ:

- ✓ powtarzaj
 - ✓ rozwiązuj zadania
 - ✓ rób notatki
 - ✓ analizuj błędy
 - ✓ odpoczywaj
 - ✓ dbaj o siebie
- ♡

Mate kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA MNOŻENIA

Mój plan
Nasz wysiłek
Twój sukces

Mate kroki każdego dnia prowadzą do wielkich celów!



1x

- 1 × 1 = 1
- 1 × 2 = 2
- 1 × 3 = 3
- 1 × 4 = 4
- 1 × 5 = 5
- 1 × 6 = 6
- 1 × 7 = 7
- 1 × 8 = 8
- 1 × 9 = 9
- 1 × 10 = 10

2x

- 2 × 1 = 2
- 2 × 2 = 4
- 2 × 3 = 6
- 2 × 4 = 8
- 2 × 5 = 10
- 2 × 6 = 12
- 2 × 7 = 14
- 2 × 8 = 16
- 2 × 9 = 18
- 2 × 10 = 20

3x

- 3 × 1 = 3
- 3 × 2 = 6
- 3 × 3 = 9
- 3 × 4 = 12
- 3 × 5 = 15
- 3 × 6 = 18
- 3 × 7 = 21
- 3 × 8 = 24
- 3 × 9 = 27
- 3 × 10 = 30

4x

- 4 × 1 = 4
- 4 × 2 = 8
- 4 × 3 = 12
- 4 × 4 = 16
- 4 × 5 = 20
- 4 × 6 = 24
- 4 × 7 = 28
- 4 × 8 = 32
- 4 × 9 = 36
- 4 × 10 = 40

5x

- 5 × 1 = 5
- 5 × 2 = 10
- 5 × 3 = 15
- 5 × 4 = 20
- 5 × 5 = 25
- 5 × 6 = 30
- 5 × 7 = 35
- 5 × 8 = 40
- 5 × 9 = 45
- 5 × 10 = 50

6x

- 6 × 1 = 6
- 6 × 2 = 12
- 6 × 3 = 18
- 6 × 4 = 24
- 6 × 5 = 30
- 6 × 6 = 36
- 6 × 7 = 42
- 6 × 8 = 48
- 6 × 9 = 54
- 6 × 10 = 60

7x

- 7 × 1 = 7
- 7 × 2 = 14
- 7 × 3 = 21
- 7 × 4 = 28
- 7 × 5 = 35
- 7 × 6 = 42
- 7 × 7 = 49
- 7 × 8 = 56
- 7 × 9 = 63
- 7 × 10 = 70

8x

- 8 × 1 = 8
- 8 × 2 = 16
- 8 × 3 = 24
- 8 × 4 = 32
- 8 × 5 = 40
- 8 × 6 = 48
- 8 × 7 = 56
- 8 × 8 = 64
- 8 × 9 = 72
- 8 × 10 = 80

9x

- 9 × 1 = 9
- 9 × 2 = 18
- 9 × 3 = 27
- 9 × 4 = 36
- 9 × 5 = 45
- 9 × 6 = 54
- 9 × 7 = 63
- 9 × 8 = 72
- 9 × 9 = 81
- 9 × 10 = 90

10x

- 10 × 1 = 10
- 10 × 2 = 20
- 10 × 3 = 30
- 10 × 4 = 40
- 10 × 5 = 50
- 10 × 6 = 60
- 10 × 7 = 70
- 10 × 8 = 80
- 10 × 9 = 90
- 10 × 10 = 100





LICZBY RZYMSKIE



Zrozum,
zapamiętaj,
wykorzystaj!



proste zasady, które warto znać!

1. PODSTAWOWE ZNAKI

W systemie rzymskim używamy
7 znaków:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Znak	I	V	X	L	C	D	M
Wartość	1	5	10	50	100	500	1000

3. NAJWAŻNIEJSZE LICZBY

I = 1	XX = 20	CC = 200
II = 2	XXX = 30	CCC = 300
III = 3	XL = 40	CD = 400
IV = 4	L = 50	D = 500
V = 5	LX = 60	DC = 600
VI = 6	LXX = 70	DCC = 700
VII = 7	LXXX = 80	DCCC = 800
VIII = 8	XC = 90	CM = 900
IX = 9	C = 100	M = 1000
X = 10		

2. ZASADY ZAPISU

- 1 Jeśli mniejsza liczba stoi **PO PRAWĘJ** stronie większej lub równej – **DODAJEMY** jej wartość.

np. VI = 5 + 1 = 6
LXX = 50 + 10 + 10 = 70

- 2 Jeśli mniejsza liczba stoi **PO LEWEJ** stronie większej – **ODEJMUJEMY** ją od większej.

np. IV = 5 - 1 = 4
IX = 10 - 1 = 9
XL = 50 - 10 = 40

- 3 Mniejsza liczba może stać po lewej stronie większej tylko w wybranych parach:

I przed V i X X przed L i C C przed D i M

- 4 Ten sam znak może być powtórzony maksymalnie 3 razy z rzędu.

np. III = 3 XXX = 30 CCC = 300
(IIII – niepoprawnie!)

4. JAK ZAMIEŃ LICZBY ARABSKIE NA RZYMSKIE?

- Rozpisz liczbę na możliwie największe wartości rzymskie.
- Zapisuj je od największej do najmniejszej.
- Stosuj zasady z punktu 2.

Wskazówka: korzystaj z tabeli obok! ♥

1000	900	500	400	100	90	50	40	10	9	5	4	1
M	CM	D	CD	C	XC	L	XL	X	IX	V	IV	I
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1000	900	500	400	100	90	50	40	10	9	5	4	1

5. PRZYKŁADY

28

$20 + 8 = XX + VIII$
 $= XXVIII$

44

$40 + 4 = XL + IV$
 $= XLIV$

199

$100 + 90 + 9 = C + XC + IX$
 $= CXCIX$

2024

$2000 + 24 = MM + XXIV$
 $= MMXXIV$



6. CIEKAWOSTKI

- Liczby rzymskie używane były już w starożytnym Rzymie.
- Nadal spotykamy je w zegarach, książkach, na pomnikach i w filmach.
- Rok 2024 zapisujemy: MMXXIV



PAMIĘTAJ!

- ✓ Dodajemy, gdy mniejsza liczba jest po prawej.
- ✓ Odejmujemy, gdy jest po lewej.
- ✓ Tylko wybrane pary można odejmować.
- ✓ Nie powtarzamy jednego znaku więcej niż 3 razy.

ĆWICZ!

Zamień na liczby rzymskie:

- ♥ 16 = _____
♥ 39 = _____
♥ 58 = _____
♥ 147 = _____
♥ 399 = _____



♥ Matematyka to nie tylko liczby – to sposób myślenia! ♥



Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA CECH PODZIELNOŚCI

Szybki sposób na sprawdzenie,
czy liczba jest podzielna przez...

Wierz w siebie!
Dasz radę!

PRZEZ 2

Liczba jest podzielna przez 2,
jeśli jej ostatnia cyfra
jest parzysta (0, 2, 4, 6, 8).



124 ✓ 2468 ✓

135 ✗ 9871 ✗

PRZEZ 3

Liczba jest podzielna przez 3,
jeśli suma jej cyfr jest
podzielna przez 3.

123 ✓ ($1+2+3=6$)

124 ✗ ($1+2+4=7$)

PRZEZ 4

Liczba jest podzielna przez 4,
jeśli jej dwie ostatnie cyfry
tworzą liczbę podzielną przez 4.

532 ✓ ($32 : 4 = 8$)

538 ✗ ($38 : 4 = 9 \text{ r. } 2$)

PRZEZ 5

Liczba jest podzielna przez 5,
jeśli jej ostatnia cyfra
to 0 lub 5.

245 ✓ 120 ✓

123 ✗ 748 ✗

PRZEZ 6

Liczba jest podzielna przez 6,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 2 i przez 3.

132 ✓ (parzysta i $1+3+2=6$)

134 ✗ (parzysta, ale $1+3+4=8$)

PRZEZ 8

Liczba jest podzielna przez 8,
jeśli jej trzy ostatnie cyfry
tworzą liczbę podzielną przez 8.

1576 ✓ ($576 : 8 = 72$)

1570 ✗ ($570 : 8 = 71 \text{ r. } 2$)

PRZEZ 9

Liczba jest podzielna przez 9,
jeśli suma jej cyfr jest
podzielna przez 9.

126 ✓ ($1+2+6=9$)

127 ✗ ($1+2+7=10$)

PRZEZ 10

Liczba jest podzielna przez 10,
jeśli jej ostatnia cyfra
to 0.

230 ✓ 1050 ✓

231 ✗ 1051 ✗

PRZEZ 12

Liczba jest podzielna przez 12,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 3 i przez 4.

144 ✓ (3 i 4)

150 ✓ (3 i 4)

142 ✗ (3, ale nie 4)

PRZEZ 14

Liczba jest podzielna przez 14,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 2 i przez 7.

98 ✓ (parzysta i $98 : 7 = 14$)

196 ✓ (parzysta i $196 : 7 = 28$)

100 ✗ (parzysta, ale $100 : 7 \neq$)

PRZEZ 15

Liczba jest podzielna przez 15,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 3 i przez 5.

150 ✓ (3 i 5)

135 ✓ (3 i 5)

152 ✗ (5, ale nie 3)

PRZEZ 16

Liczba jest podzielna przez 16,
jeśli jej cztery ostatnie cyfry
tworzą liczbę podzielną przez 16.

64256 ✓ ($4256 : 16 = 266$)

12340 ✗ ($2340 : 16 \neq$)

PRZYKŁAD ZADANIA

Zadanie 5. (2 pkt)

Wykaż, że dla każdej nieparzystej
liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$
jest podzielna przez 4.



Rozwiązanie

Krok 1. Rozpisanie podanej liczby.

Liczbę nieparzystą zapisujemy jako $2k + 1$

(gdzie k jest liczbą całkowitą).

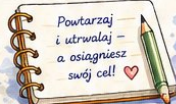
Podstawiając do wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$,
otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (2k + 1)^2 + 2 \cdot (2k + 1) + 7 = \\ & = 3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 4k + 2 + 7 = \\ & = 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 2 + 7 = \\ & = 12k^2 + 16k + 12 = 4 \cdot (3k^2 + 4k + 3) \end{aligned}$$

Powtarzaj i utrwalał –
a osiągniesz
swoją cel!

Krok 2. Zakończenie dowodzenia.

Wartość wyrażenia $3k^2 + 4k + 3$ jest
dodatnia, a tym samym wyrażona
czwórka przed nawias oznacza,
że liczba jest jak najbardziej
podzielna przez 4, co należało
udowodnić.



Mate kroki
dzisiaj - wielkie
wyniki jutro!

POTĘGI i PIERWIĄSTKI

najczęściej przydatne na egzaminie ósmoklasisty

Wierz w siebie!
Dasz radę!

POTĘGI DO KWADRATU (2)

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

$5^2 = 25$

$6^2 = 36$

$7^2 = 49$

$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$10^2 = 100$

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$13^2 = 169$

$14^2 = 196$

$15^2 = 225$

$16^2 = 256$

$17^2 = 289$

$18^2 = 324$

$19^2 = 361$

$20^2 = 400$

POTĘGI DO SZEŚCIANU (3)

$1^3 = 1$

$2^3 = 8$

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$



Regularna nauka
to klucz do
sukcesu!

PIERWIĄSTKI KWADRATOWE

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{144} = 12$

$\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{196} = 14$

$\sqrt{225} = 15$

$\sqrt{256} = 16$

$\sqrt{289} = 17$

$\sqrt{324} = 18$

$\sqrt{361} = 19$

$\sqrt{400} = 20$

PIERWIĄSTKI SZEŚCIENNE

$\sqrt[3]{1} = 1$

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{216} = 6$

$\sqrt[3]{343} = 7$

$\sqrt[3]{512} = 8$

$\sqrt[3]{729} = 9$

$\sqrt[3]{1000} = 10$

TABLICZKA MNOŻENIA

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Pamiętaj!

- ☒ Zrozum
- ☒ Ćwicz
- ☒ Powtarzaj
- ☒ Osiągaj cele!



Małe kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA POTĘG LICZB

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze potęgi, które warto znać!

2 DO 1024

2^0	=	1
2^1	=	2
2^2	=	4
2^3	=	8
2^4	=	16
2^5	=	32
2^6	=	64
2^7	=	128
2^8	=	256
2^9	=	512
2^{10}	=	1024

3 DO 729

3^0	=	1
3^1	=	3
3^2	=	9
3^3	=	27
3^4	=	81
3^5	=	243
3^6	=	729

4 DO 1032

4^0	=	1
4^1	=	4
4^2	=	16
4^3	=	64
4^4	=	256
4^5	=	1024

5 DO 625

5^0	=	1
5^1	=	5
5^2	=	25
5^3	=	125
5^4	=	625

6 DO 216

6^0	=	1
6^1	=	6
6^2	=	36
6^3	=	216

PAMIĘTAJ!

- ✓ Każda liczba (różna od zera) podniesiona do potęgi 0 jest równa 1.
- ✓ Im większa potęga, tym większa wartość wyniku.
- ✓ Warto znać te potęgi na pamięć – często przydają się w zadaniach!

Powtarzaj
i utrwalaj –
a osiągniesz
swoją cel!

Matematyka to nie tylko liczby – to sposób myślenia!



Małe kroki
dziś – wielkie
wyniki **jutro!**

≡ DZIAŁANIA ≡ NA POTĘGACH



Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

najważniejsze zasady, które warto znać!

1. MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Przykład:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

Przy mnożeniu potęg o tych samych podstawach dodajemy wykładniki.

2. DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

(dla $m \geq n$)

Przykład:

$$3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$$

Przy dzieleniu potęg o tych samych podstawach odejmujemy wykładniki.

3. POTĘGA POTĘGI

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Przykład:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$$

Przy potędze potęgi mnożymy wykładniki.

4. MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Przykład:

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$$

Przy mnożeniu potęg o tych samych wykładnikach mnożymy podstawy, a wykładnik zostawiamy bez zmian.

5. DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

(dla $b \neq 0$)

Przykład:

$$8^3 : 2^3 = \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 4^3 = 64$$

Przy dzieleniu potęg o tych samych wykładnikach dzielimy podstawy, a wykładnik zostawiamy bez zmian.

6. POTĘGA ILORAZU

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

(dla $b \neq 0$)

Przykład:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$$

Potęga ilorazu można zapisać jako iloraz potęg.

WAŻNE!

- ✓ $a \neq 0$
- ✓ m, n – liczby naturalne
- ✓ Najpierw wykonuj działania w nawiasach.
- ✓ Pamiętaj o kolejności działań!



PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

★ $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 2^{3+2+4} = 2^9 = 512$

★ $(5^2)^3 : 5^4 = 5^{2 \cdot 3} : 5^4 = 5^6 : 5^4 = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

★ $(3^3 \cdot 2^3) : (6^3) = \left(\frac{3 \cdot 2}{6}\right)^3 = 1^3 = 1$

ZAPAMIĘTAJ!

Wszystkie te zasady pozwolą Ci szybko i bezbłędnie liczyć z potęgami!



♥ Ćwicz regularnie – sukces jest bliżej, niż myślisz! ♥



Mate kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

≡ DZIAŁANIA ≡ NA PIERWIASTKACH

Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

najważniejsze zasady, które warto znać!

1. PIERWIASEK Z ILOCZYNU

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

dla $a \geq 0, b \geq 0$

Przykład:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



2. PIERWIASEK Z ILORAZU

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

dla $a \geq 0, b > 0$

Przykład:

$$\sqrt{\frac{8}{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$



3. PIERWIASEK Z POTĘGĄ

$$\sqrt{a^2} = a$$

dla $a \geq 0$

Przykład:

$$\sqrt{7^2} = 7$$
$$\sqrt{15^2} = 15$$



4. WYŁĄCZANIE CZWOROŚCIANU SPÓD PIERWIASKA

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$$

dla $a \geq 0, b \geq 0$

Przykład:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$



5. WNOSZENIE CZWOROŚCIANU POD PIERWIASEK

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$$

dla $a \geq 0, b \geq 0$

Przykład:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$



6. DODAWANIE I ODEJMOWANIE PIERWIASKÓW

Dodajemy (odejmujemy) tylko
pierwiastki podobne,
czyli z jednakowych liczb
pod pierwiastkiem.

Przykłady:

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$7\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

× $2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}$ – nie można!



7. UPRASZCZANIE PIERWIASKÓW

Rozkładamy liczbę
pod pierwiastkiem
na czynnik będący
kwadratem liczby
i pozostałą częścią.

Przykład:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

1. Rozkład: $72 = 36 \cdot 2$

2. $36 = 6^2$ – to kwadrat liczby 6

3. Wyłączamy 6 przed pierwiastek



WAŻNE!

- ✓ Pod pierwiastkiem zawsze musi być liczba nieujemna.
- ✓ Pierwiastek z liczby ujemnej jest liczbą ujemną.
- ✓ Zawsze upraszczaj wynik do najprostszej postaci.
- ✓ Najpierw wykonaj działania w nawiasach.



PRZYKŁADY – KROK PO KROKU

1 $\sqrt{12 \cdot 3}$
 $= \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$
 $= \sqrt{4 \cdot 3} \cdot \sqrt{3}$
 $= \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$
 $= 2 \cdot 3 = 6$

2 $\sqrt{\frac{50}{2}}$
 $= \sqrt{50} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{25 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$

3 $4\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
 $= (4 - 1 + 2)\sqrt{5}$
 $= 5\sqrt{5}$

4 $\sqrt{98}$
 $= \sqrt{49 \cdot 2}$
 $= \sqrt{49} \cdot \sqrt{2}$
 $= 7\sqrt{2}$



♥ Matematyka to nie tylko liczby – to sposób myślenia! ♥



Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

UŁAMKI ZWYKŁE I DZIESIĘTNE

– DZIAŁANIA, KTÓRE MUSISZ ZNAĆ! –

Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

UŁAMKI ZWYKŁE

$\frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ a – licznik (góra) b – mianownik (dół)

1. DODAWANIE

Ułamki o tych samych mianownikach:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Przykład:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

Ułamki o różnych mianownikach:
1. Doprowadź do wspólnego mianownika.

2. Dodaj liczniki.

3. Mianownik zostaje ten sam.

Przykład:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. ODEJMOWANIE

Ułamki o tych samych mianownikach:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Przykład:

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$$

Ułamki o różnych mianownikach:
1. Doprowadź do wspólnego mianownika.

2. Odejmij liczniki.

3. Mianownik zostaje ten sam.

Przykład:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

3. MNOŻENIE

Mnożymy liczniki przez liczniki, a mianowniki przez mianowniki.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Przykład:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Wskazówka:

Zawsze skracaj ułamek, jeśli to możliwe!

4. DZIELENIE

Mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Przykład:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Wskazówka:

Odwrotność ułamka $\frac{a}{b}$ to $\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$).

SKRACANIE UŁAMKÓW:

Dzielimy licznik i mianownik przez tę samą liczbę ($\neq 0$).

$$\text{Przykład: } \frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

ROZSZERZANIE UŁAMKÓW:

Mnożymy licznik i mianownik przez tę samą liczbę ($\neq 0$).

$$\text{Przykład: } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

UŁAMKI DZIESIĘTNE

Ułamki dziesiętne zapisujemy z przecinkiem, np. 2,5 ; 0,75 ; 3,125

Pamiętaj: przecinek ustawiamy jeden pod drugim!

1. DODAWANIE

Dodajemy jak liczby naturalne. Wyrównujemy przecinki.

Przykład:

$$\begin{array}{r} 3,45 \\ + 1,27 \\ \hline 4,72 \end{array}$$

Wskazówka:

Jeśli brakuje miejsc po przecinku, dopisujemy zera.

2. ODEJMOWANIE

Odejmujemy jak liczby naturalne. Wyrównujemy przecinki.

Przykład:

$$\begin{array}{r} 7,80 \\ - 2,35 \\ \hline 5,45 \end{array}$$

pożyczamy 1, z 8 zostaje 7, z 0 wtedy robi się 10

Wskazówka:

Dopisuj zera, aby liczby miały tyle samych miejsc po przecinku.

3. MNOŻENIE

Mnożymy jak liczby naturalne. Wynik ma tyle miejsc po przecinku, ile łącznie mają liczby w działaniu.

Przykład:

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 1,2 \\ \hline 5,0 \\ + 2,5 \\ \hline 3,00 \rightarrow 3 \end{array}$$

Wskazówka:

2,5 ma 1 miejsce, 1,2 ma 1 miejsce, razem 2 miejsca po przecinku.

4. DZIELENIE

Dzielimy jak liczby naturalne. Wynik zapisujemy z przecinkiem.

Przykład:

$$\begin{array}{r} 7,20 : 1,5 = 4,8 \\ \underline{4,8} \\ 7,2 : 15 \\ \underline{60} \\ 120 \\ \underline{120} \\ 0 \end{array}$$

Wskazówka:

Możesz dopisać zera do dzielnej, aby otrzymać dokładniejszy wynik.

WAŻNE!

- ✓ Zawsze upraszczaj wynik, jeśli możesz.
- ✓ Uwzględnij znaki: + i -.
- ✓ Sprawdzaj wynik (szacuj w pamięci).

ZAMIANA UŁAMKA ZWYKŁEGO NA DZIESIĘTNY

$$\text{Przykład: } \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625$$

ZAMIANA UŁAMKA DZIESIĘTNEGO NA ZWYKŁY

$$\text{Przykład: } 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Mate kroki
dzisiaj - wielkie
wyniki jutro!

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

Zrozum, zapamiętaj, wykorzystaj!

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

To wyrażenia zawierające liczby,
literę (zmienne) oraz działania.

Przykłady:

$$5a + 2b, \quad 3x - 7, \quad a^2 + 4ab - b^2,$$

$$2(x + 3), \quad \frac{1}{2}y - 5$$



ELEMENTY WYRAŻENIA ALGEBRAICZNEGO

- Stała - liczba bez zmiennej, np. 7, -3
- Zmienna (niewiadoma) - litera, np. a, x, y
- Współczynnik - liczba stojąca przy zmiennej, np. w wyrażeniu 5a współczynnik to 5
- Wyraz - każda część wyrażenia oddzielona znakiem + lub -, np. w $3x - 2y + 7$ są trzy wyrazy
- Stopień wyrazu - suma potęg zmiennych w jednym wyrazie, np. w $4a^2b$ stopień = $2 + 1 = 3$

UPROSZCZANIE WYRAŻEŃ

Łączymy wyrazy podobne.

Przykład:

$$3a + 5a - 2a = (3 + 5 - 2)a = 6a$$

$$2x - 3y + 4x + y - 6 =$$

$$= (2x + 4x) + (-3y + y) - 6 =$$

$$= 6x - 2y - 6$$

DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH ALGEBRAICZNYCH

1. DODAWANIE



Dodajemy wyrazy podobne.

Przykład:

$$(2a + 3b) + (5a - b + 2) =$$

$$= 2a + 3b + 5a - b + 2 =$$

$$= 7a + 2b + 2$$

2. ODEJMOWANIE



Odejmujemy wyrazy podobne.

Przykład:

$$(4x - 2y + 1) - (x + y - 3) =$$

$$= 4x - 2y + 1 - x - y + 3 =$$

$$= 3x - 3y + 4$$

3. MNOŻENIE PRZEZ LICZBĘ



Mnożymy każdy wyraz przez tę liczbę.

Przykład:

$$3(2a - b + 4) =$$

$$= 6a - 3b + 12$$

4. MNOŻENIE NAWIASEK

Mnożymy każdy wyraz pierwszej nawiasu przez każdy wyraz drugiej.

Przykład:

$$(2x + 1)(x - 3) =$$

$$= 2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$$

$$= 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

ZASADY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ

- Do obu stron równania możesz dodawać lub odejmować tę samą liczbę.
- Do obu stron równania możesz mnożyć lub dzielić przez tę samą liczbę różną od 0.
- Zawsze wykonuj działania w odwrotnej kolejności niż w równaniu.

RÓWNANIA

Równanie to równość zawierająca niewiadomą.
Naszym celem jest obliczyć wartość niewiadomej.



PRZYKŁADY

1. Równanie liniowe

$$2x + 5 = 17$$

$$2x = 17 - 5$$

$$2x = 12$$

$$x = 12 : 2$$

$$x = 6$$

2. Równanie z nawiasem

$$3(x - 4) = 15$$

$$x - 4 = 15 : 3$$

$$x - 4 = 5$$

$$x = 5 + 4$$

$$x = 9$$

3. Równanie z niewiadomą po obu stronach

$$4x - 7 = 2x + 5$$

$$4x - 2x = 5 + 7$$

$$2x = 12$$

$$x = 12 : 2$$

$$x = 6$$

SPRAWDZENIE

Podstaw wartość niewiadomej do równania.

Przykład dla $2x + 5 = 17$, $x = 6$:

$$2 \cdot 6 + 5 = 17$$

$$12 + 5 = 17$$

$$17 = 17 \quad \checkmark$$

Równanie jest spełnione.



RODZAJE RÓWNAŃ

Równanie liniowe
(stopień 1)

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

Przykład:

$$3x - 9 = 0$$

$$3x = 9 \quad :3$$

$$x = 3$$

Równanie z nawiasem

$$a(x + b) + c = 0$$

Przykład:

$$2(x + 3) - 5 = 0$$

$$2x + 6 - 5 = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad -1$$

$$2x = -1 \quad :2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Równanie z ułamkami

$$\frac{ax + b}{c} = d \quad (c \neq 0)$$

Przykład:

$$\frac{x + 1}{2} = 5 \quad \cdot 2$$

$$x + 1 = 10 \quad -1$$

$$x = 9$$

Równanie z niewiadomą po obu stronach

$$ax + b = cx + d \quad (a \neq c)$$

Przykład:

$$5x + 7 = 2x - 2$$

$$5x - 2x = -2 - 7$$

$$3x = -9 \quad :3$$

$$x = -3$$

PRZYKŁADY PRAKTYCZNE

1. Ania kupiła 3 zeszyty w cenie x zł za sztukę i zapłaciła łącznie 15 zł.
Ile kosztował jeden zeszyt?

$$\text{Równanie: } 3x = 15$$

$$x = 15 : 3 = 5$$

Odp.: Jeden zeszyt kosztował 5 zł.



2. W koszyku są jabłka i gruszki. Jablek jest o 4 więcej niż gruszek.
Razem jest 16 owoców. Ile jest jablek, a ile gruszek?

Oznacz: x - liczba gruszek

x + 4 - liczba jablek

$$\text{Równanie: } x + (x + 4) = 16$$

$$2x + 4 = 16$$

$$2x = 12 \quad :2$$

$$x = 6$$

Gruszek jest 6, a jablek $6 + 4 = 10$.

Odp.: 6 gruszek i 10 jablek.



WAŻNE!

- Uprzączaj wyrażenia przed rozwiązaniem.
- Przełącz wyrazy na drugą stronę ze zmianą znaku.
- Mnoż lub dziel obie strony przez tę samą liczbę.
- Na końcu zawsze sprawdź rozwiązanie!



Matematyka to nie tylko liczby - to sposób myślenia!





ODCZYTYWANIE INFORMACJI Z WYKRESU

Zrozum wykres
- zinterpretuj
- wykorzystaj!

Krok po kroku do poprawnych wniosków!

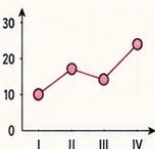
1. ZANIM ZACZNIESZ - SPRAWDŹ!

- ✓ Jaki to rodzaj wykresu?
(liniowy, słupkowy, kołowy...)
- ✓ Co przedstawia oś pozioma (OX)?
- ✓ Co przedstawia oś pionowa (OY)?
- ✓ Jakie są jednostki?
- ✓ Jaki jest tytuł wykresu / legenda?

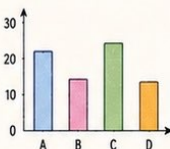


2. RODZAJE WYKRESÓW

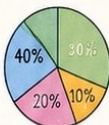
LINIOWY - pokazuje zmiany w czasie lub zależności.



SŁUPKOWY - porównuje wartości między kategoriami.



KOŁOWY - pokazuje udział procentowy części w całości.



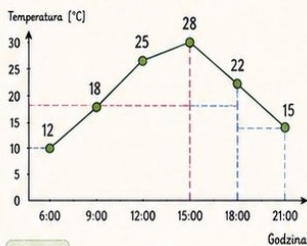
3. JAK ODCZYTYWAĆ?

- ★ Znajdź na osi poziomej (OX) interesującą Cię wartość.
- ★ Idź w górę (lub w dół) do wykresu.
- ★ Z odczytanego punktu idź w lewo do osi pionowej (OY).
- ★ Odczytaj wartość i nie zapomnij o jednostce!



A) WYKRES LINIOWY

Temperatura w ciągu dnia



Odczyty:

- O 15:00 temperatura wynosiła 28°C.
- O 21:00 temperatura wynosiła 15°C.

Wniosek:

Najwyższa temperatura była o 15:00 (28°C), najniższa o 6:00 (12°C).



4. PRZYKŁADY

B) WYKRES SŁUPKOWY

Liczba książek przeczytanych w miesiącu



Odczyty:

- W marcu przeczytano 18 książek.
- W styczniu przeczytano 8 książek.

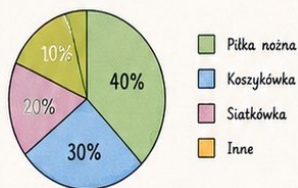
Wniosek:

Najwięcej książek przeczytano w marcu, najmniej w styczniu.



C) WYKRES KOŁOWY

Ulubione sporty w klasie



Odczyty:

- 40% uczniów lubi piłkę nożną.
- 20% uczniów lubi siatkówkę.

Wniosek:

Najbardziej popularna jest piłka nożna, najmniej popularne są inne sporty.



5. NAJCZĘSTSZE BŁĘDY



- ✗ Nieczytanie opisów osi i legendy.
- ✗ Pomylenie osi OX i OY.
- ✗ Brak jednostki w odpowiedzi.
- ✗ Odczytywanie „na oko” bez dokładności.



6. PAMIĘTAJ!



- ✓ Zawsze czytaj tytuł wykresu.
- ✓ Zwracaj uwagę na jednostki.
- ✓ Używaj pełnych zdań w odpowiedzi.
- ✓ Ćwicz - im więcej, tym lepiej!



7. SZYBKA ŚCIĄGA



- ↑ wartość rośnie
- ↓ wartość maleje
- = wartość stała
- > większa wartość
- < mniejsza wartość

Jednostki:

°C - stopnie Celsjusza
m - metry
kg - kilogramy
s - sekundy
zł - złote

♥ Wykresy mówią dużo - naucz się ich słuchać! ♥



≡ TABLICZKA ≡

SPOSÓB PROPORCJI

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Proporcja to porównanie dwóch wielkości.

1. CO TO JEST PROPORCJA? ♥

Proporcja to równość dwóch stosunków.

$$a : b = c : x$$

czyli:

„a ma się do b tak jak c do x”

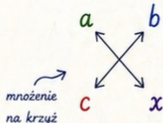
2. ZASADA - MNOŻENIE NA KRZYŻ ♥

W proporcji iloczyn skrajnych wyrazów jest równy iloczynowi środkowych wyrazów.

$$a : b = c : x \Rightarrow a \cdot x = b \cdot c$$

Stąd:

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$



3. KIEDY UŻYWAĆ PROPORCJI? ♥

Proporcje stosujemy m.in. w zadaniach z:

- ♥ procentami
- ♥ skalą i mapami
- ♥ zamianami jednostek
- ♥ zadaniami „ile z czego”
- ♥ mieszkankami, stężeniami



PIAMIĘTAJ!

Figury podobne mają takie same kąty, a ich boki są proporcjonalne.

PRZYKŁAD 1: PROCENT Z LICZBY ♥

Ile to 20% z 150?

$$\begin{array}{l} 100\% \rightarrow 150 \\ 20\% \rightarrow x \end{array}$$

PROPORCJA

$$100 : 150 = 20 : x$$

LICZYMY

$$x = \frac{150 \cdot 20}{100} = \frac{3000}{100} = \underline{\underline{30}}$$

ODPOWIEDŹ: 30 ♥

PRZYKŁAD 2: ZNAJDŹ LICZBĘ ♥

30% liczby to 45. Ile to liczba?

$$\begin{array}{l} 30\% \rightarrow 45 \\ 100\% \rightarrow x \end{array}$$

PROPORCJA

$$30 : 45 = 100 : x$$

LICZYMY

$$x = \frac{45 \cdot 100}{30} = \frac{4500}{30} = \underline{\underline{150}}$$

ODPOWIEDŹ: 150 ♥

PRZYKŁAD 3: PROCENT ♥

45 z 150 to ile procent?

$$\begin{array}{l} 150 \rightarrow 100\% \\ 45 \rightarrow x \end{array}$$

PROPORCJA

$$150 : 100 = 45 : x$$

LICZYMY

$$x = \frac{45 \cdot 100}{150} = \frac{4500}{150} = \underline{\underline{30}}$$

ODPOWIEDŹ: 30% ♥

NA CO ZWRACAĆ UWAGĘ? ☆

- ✓ Zawsze ustawiaj proporcję tak, aby odpowiadające sobie wielkości były po przekątnej.
- ✓ Procenty ustawiaj naprzeciwko procentów, liczby naprzeciwko liczb.
- ✓ Sprawdź wynik i jednostki!



NAJCZĘSTSZY BŁĄD! ❗

Źle ustawiona proporcja.

Zawsze dokładnie sprawdź, co do czego ma się odnosić!



PIAMIĘTAJ! ♥

Ćwicz regularnie, a zobaczysz rezultaty!



PLAN

zaplanyj swoją naukę



ANALIZA

wyciągaj wnioski



SPRAWDŹ

kontroluj swoją wiedzę



ZAPAMIĘTAJ

kluczowe rzeczy



POŁĄCZ

łącz fakty i zagadnienia



WYTRWAJ

systematyczność to klucz

Małe kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA PROCENTÓW

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze wzory, które warto znać!

1. PROCENT Z LICZBY

Aby obliczyć $p\%$ liczby a ,
mnożymy tę liczbę przez
 $p\%$ (czyli $\frac{p}{100}$).

$$p\% \text{ z } a = a \cdot \frac{p}{100}$$

PRZYKŁAD: ☆

$$20\% \text{ z } 150 = 150 \cdot \frac{20}{100} = 30$$

$$75\% \text{ z } 80 = 80 \cdot \frac{75}{100} = 60$$

2. LICZBA NA PODSTAWIE PROCENTU

Jeśli $p\%$ danej liczby to a ,
to cała liczba wynosi:

$$a = \frac{a \cdot 100}{p}$$

PRZYKŁAD: ☆

$$30\% \text{ liczby to } 45 \Rightarrow 45 = 30\% \cdot x$$

$$x = \frac{45 \cdot 100}{30} = 150$$

3. PROCENT PROCENTU

Aby obliczyć $p\%$ z $q\%$ liczby a ,
mnożymy a przez $p\%$ i przez $q\%$.

$$p\% \text{ z } q\% \text{ z } a = a \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100}$$

PRZYKŁAD: ☆

$$20\% \text{ z } 50\% \text{ z } 200 =$$

$$200 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{50}{100} = 20$$

4. ZWIĘKSZANIE O PROCENT

Aby zwiększyć liczbę a o $p\%$,
mnożymy ją przez $(100\% + p\%)$.

$$a_{\text{nowe}} = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena 120 zł wzrasta o 15%:

$$120 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 138 \text{ zł}$$

5. ZMNIJSZANIE O PROCENT

Aby zmniejszyć liczbę a o $p\%$,
mnożymy ją przez $(100\% - p\%)$.

$$a_{\text{nowe}} = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena 200 zł obniżona o 10%:

$$200 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 180 \text{ zł}$$

6. O ILE PROCENT WIĘCEJ / MNIJ?

O ILE PROCENT WIĘCEJ?

Różnicę dzielimy przez
wartość początkową
i mnożymy przez 100%.

$$\frac{a_{\text{nowe}} - a_{\text{stare}}}{a_{\text{stare}}} \cdot 100\%$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena wzrosła z 80 zł do 100 zł.

$$\frac{100 - 80}{80} \cdot 100\% = 25\%$$

O ILE PROCENT MNIJ?

Różnicę dzielimy przez
wartość początkową
i mnożymy przez 100%.

$$\frac{a_{\text{nowe}} - a_{\text{stare}}}{a_{\text{stare}}} \cdot 100\%$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena spadła z 120 zł do 90 zł.

$$\frac{120 - 90}{120} \cdot 100\% = 25\%$$

7. NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANE PROCENTY

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$50\% = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$75\% = \frac{75}{100} = 0,75$$

$$10\% = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$80\% = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$20\% = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$90\% = \frac{90}{100} = 0,9$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$100\% = \frac{100}{100} = 1$$

8. PROCENTY W PRAKTYCE

RABAT

Cena 250 zł
Rabat 20%

$$250 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 200 \text{ zł}$$

PODWYŻKA

Pensja 3000 zł
Podwyżka 8%

$$3000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 3240 \text{ zł}$$

PORÓWNIANIE

Liczba A = 60
Liczba B = 75

O ile % B jest większe od A?

$$\frac{75 - 60}{60} \cdot 100\% = 25\%$$

9. PAMIĘTAJ!

- ✓ Zawsze czytaj uważnie treść zadania.
- ✓ Zwróć uwagę na jednostki (zł, %, kg itd.).
- ✓ Sprawdź, czego szukasz: więcej, mniej czy ile %.
- ✓ Zapisz działanie i jednostkę w odpowiedzi!



Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA

Dwie wielkości są wprost proporcjonalne,
jeśli ich iloraz jest stały (równy k).

Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!



1. CO TO JEST?

Dwie wielkości x i y są wprost proporcjonalne, jeśli istnieje taka liczba k (stała proporcjonalności), że dla każdej pary wartości tych wielkości spełniony jest warunek:

$$y = k \cdot x$$

lub

$$\frac{y}{x} = k \quad (x \neq 0)$$

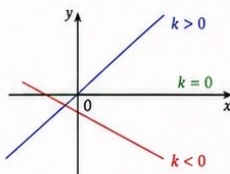
k – stała proporcjonalności



Pamiętaj!
Jeśli jedna wielkość rośnie (lub maleje)
a druga rośnie (lub maleje) tyle samo razy,
to mamy do czynienia z proporcjonalnością prostą.

2. WŁASNOŚCI

- ✓ Iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały i równy k .
- ✓ Wykresem zależności jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych $(0, 0)$.
- ✓ Jeśli $k > 0$ – prosta rośnie.
- ✓ Jeśli $k < 0$ – prosta maleje.
- ✓ Jeśli $k = 0$ – wtedy $y = 0$ (wszystkie punkty leżą na osi OX).



3. JAK OBLICZYĆ STAŁĄ PROPORCJONALNOŚCI?

Jeśli wielkości x i y są wprost proporcjonalne, to stałą k obliczamy ze wzoru:

$$k = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Wystarczy wziąć dowolną parę wartości (x, y)
i obliczyć iloraz $\frac{y}{x}$.



Uwaga!

Jednostki k to: jednostka y / jednostka x .
Przykład: zł / kg, km / h, cm / szt.

4. PRZYKŁAD – TABELA WARTOŚCI

Cena jabłek jest wprost proporcjonalna do ich masy. 2 kg jabłek kosztują 6 zł.

Obliczamy stałą proporcjonalności:

$$k = \frac{y}{x} = \frac{6 \text{ zł}}{2 \text{ kg}} = 3 \frac{\text{zł}}{\text{kg}}$$

Cena 1 kg jabłek wynosi 3 zł.

$$\text{Zatem } y = 3x$$

$$y - \text{cena (zł)}$$

$$x - \text{masa (kg)}$$



Masa (x) [kg]	0	1	2	3	4	5
Cena (y) [zł]	0	3	6	9	12	15
Iloraz $\frac{y}{x}$	–	3	3	3	3	3

Wniosek:

Iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały i równy 3.

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne.

$$k = 3 \frac{\text{zł}}{\text{kg}}$$

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

- Cena towaru zależy od jego ilości (cena za 1 szt. jest stała).
- Droga zależy od czasu jazdy ze stałą prędkością.
- Masa zależy od liczby jednakowych przedmiotów.
- Obwód koła zależy od długości średnicy (przy stałym π).

Przykład:

Samochód jedzie ze stałą prędkością 60 km/h.

Droga (s) jest wprost proporcjonalna do czasu (t).

$$s = 60t$$



Czas (t) [h]	0	1	2	3	4
Droga (s) [km]	0	60	120	180	240

6. ZADANIA

1. Sprawdź, czy podane wielkości są wprost proporcjonalne. Jeśli tak – oblicz stałą k .

a)	x	2	4	6	8
	y	3	6	9	12
b)	x	1	2	3	4
	y	2	3	4	5

2. Cena książek jest wprost proporcjonalna do ich liczby.

5 książek kosztuje 75 zł.

- Ile kosztuje 1 książka?
- Ile zapłacimy za 12 książek?
- Ile książek kupimy za 45 zł?

7. WAŻNE! ZAPAMIĘTAJ

- ✓ Proporcjonalność prosta opisuje zależność:
 $y = kx$
- ✓ Współczynnik k to stała proporcjonalności.
- ✓ Wykresem jest prosta przechodząca przez $(0, 0)$.
- ✓ Iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały (dla $x \neq 0$).
- ✓ Sprawdzenie: jeśli dla wszystkich par (x, y) iloraz $\frac{y}{x}$ jest taki sam, to wielkości są wprost proporcjonalne.



Ćwicz regularnie – zobaczysz, jakie to proste!





Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

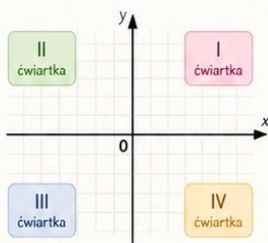
W UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE

Wszystko, co musisz wiedzieć!

Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

1. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Do dwa prostopadłe kierunki:
oś pozioma OX i oś pionowa OY .
Ich punkt przecięcia to początek
układu $(0,0)$.



Każdy punkt opisujemy parą liczb (x, y) ,
gdzie x – odczyt z osi OX (poziomej),
 y – odczyt z osi OY (pionowej).

2. WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU

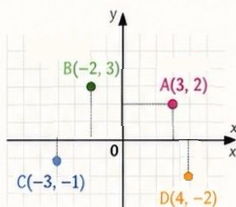
Punkt $P = (x, y)$
 x – odcięta (na osi OX)
 y – rzędna (na osi OY)

Jak odczytać punkt?

- Idź w poziomie od początku układu w prawo ($x > 0$) lub w lewo ($x < 0$).
- Następnie idź w pionie w górę ($y > 0$) lub w dół ($y < 0$).
- Otrzymasz punkt $P(x, y)$!

Przykłady:

- $A(3, 2)$
- $B(-2, 3)$
- $C(-3, -1)$
- $D(4, -2)$



3. ŚRODEK ODCINKA

Środek odcinka AB , gdzie
 $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$
ma współrzędne:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Przykład:

$A(-2, 4)$, $B(6, 8)$

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right) \\ &= \left(\frac{4}{2}, \frac{12}{2} \right) \\ &= (2, 6) \end{aligned}$$



PRZYKŁAD – ZADANIE Z EGZAMINU

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty: $K = (-2, 8)$ i $M = (4, 6)$.

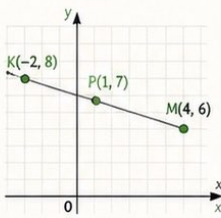
Oblicz współrzędne punktu P takiego, że jeden z trzech punktów P , K , M jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach.

1. P jest środkiem odcinka KM

P – środek odcinka KM

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{8 + 6}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2}, \frac{14}{2} \right) \\ &= (1, 7) \end{aligned}$$

$$P = (1, 7)$$

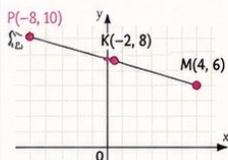


2. K jest środkiem odcinka PM

K – środek odcinka PM

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{x + 4}{2} \quad | \cdot 2 \\ -4 &= x + 4 \\ x &= -8 \\ 8 &= \frac{y + 6}{2} \quad | \cdot 2 \\ 16 &= y + 6 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

$$P = (-8, 10)$$

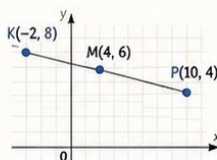


3. M jest środkiem odcinka PK

M – środek odcinka PK

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{x - 2}{2} \quad | \cdot 2 \\ 8 &= x - 2 \\ x &= 10 \\ 6 &= \frac{y + 8}{2} \quad | \cdot 2 \\ 12 &= y + 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$P = (10, 4)$$



ODPOWIEŹ

Punkt P może mieć
współrzędne:

$$(1, 7)$$

$$(-8, 10)$$

$$(10, 4)$$

Rada na egzamin!

- ✓ Zawsze sprawdź trzy możliwości!
- ✓ Uważnie podstawiaj i obliczaj!

* rysunki poglądowe

Pamiętaj: w geometrii analitycznej najważniejsze to logiczne myślenie i dokładność!

Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

ZASADA DZIAŁANIA KANTORU

Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

Waluty kupujemy taniej, a sprzedajemy drożej!

KUPNO (kantor kupuje walutę od Ciebie)

- ✓ To jest cena, którą TY otrzymasz za 1 jednostkę obcej waluty.
- ✓ Kantor kupuje walutę taniej.
- ✓ Sprzedajesz – dostajesz mniej.
- ✓ Zawsze obowiązuje kurs KUPNA.

Ty sprzedajesz walutę → patrz kurs KUPNA.



SPRZEDAŻ (kantor sprzedaje walutę Tobie)

- ✓ To jest cena, którą TY zapłacisz za 1 jednostkę obcej waluty.
- ✓ Kantor sprzedaje walutę drożej.
- ✓ Kupujesz – płacisz więcej.
- ✓ Zawsze obowiązuje kurs SPRZEDAŻY.

Ty kupujesz walutę → patrz kurs SPRZEDAŻY.



JAK KORZYSTAĆ Z TABELI KURSÓW?

WALUTA	KANTOR KUPUJE OD CIEBIE KUPNO (PLN)	KANTOR SPRZEDAJE TOBIE SPRZEDAŻ (PLN)	CO TO ZNACZY?
EUR	4,40	4,70	Jeśli sprzedajesz 1 EUR → otrzymasz 4,40 zł. Jeśli kupujesz 1 EUR → zapłacisz 4,70 zł.
USD	4,05	4,35	Jeśli sprzedajesz 1 USD → otrzymasz 4,05 zł. Jeśli kupujesz 1 USD → zapłacisz 4,35 zł.
GBP	5,15	5,55	Jeśli sprzedajesz 1 GBP → otrzymasz 5,15 zł. Jeśli kupujesz 1 GBP → zapłacisz 5,55 zł.
CHF	4,55	4,95	Jeśli sprzedajesz 1 CHF → otrzymasz 4,55 zł. Jeśli kupujesz 1 CHF → zapłacisz 4,95 zł.

PRZYKŁADY – SPRZEDAJESZ WALUTĘ (patrz KUPNO)

- Masz 200 EUR i chcesz je sprzedać.
Otrzymasz: $200 \times 4,40 = 880 \text{ zł}$
- Masz 150 USD i chcesz je sprzedać.
Otrzymasz: $150 \times 4,05 = 607,50 \text{ zł}$
- Masz 100 GBP i chcesz je sprzedać.
Otrzymasz: $100 \times 5,15 = 515 \text{ zł}$



PRZYKŁADY – KUPUJESZ WALUTĘ (patrz SPRZEDAŻ)

- Chcesz kupić 200 EUR.
Zapłacisz: $200 \times 4,70 = 940 \text{ zł}$
- Chcesz kupić 150 USD.
Zapłacisz: $150 \times 4,35 = 652,50 \text{ zł}$
- Chcesz kupić 100 GBP.
Zapłacisz: $100 \times 5,55 = 555 \text{ zł}$



PAMIĘTAJ!

- ✓ Kurs KUPNA jest zawsze niższy niż kurs SPRZEDAŻY.
- ✓ Różnica między nimi to marża kantoru.
- ✓ Im mniejsza różnica, tym lepiej dla Ciebie!

WAŻNE!

- ✓ Zawsze sprawdzaj, czy kupujesz czy sprzedajesz walutę.
- ✓ Patrz na odpowiednią kolumnę w tabeli.
- ✓ Zwracaj uwagę na jednostkę waluty (1 EUR, 1 USD itd.).

Świadome decyzje finansowe to oszczędność Twoich pieniędzy!

Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

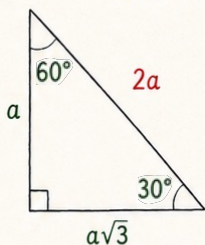
TABLICZKA WŁASNÓŚCI TRÓJKĄTÓW

Wierz w siebie!
Dasz radę!

♥ Dwa specjalne trójkąty prostokątne, które warto znać! ♥

1. TRÓJKĄT $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ♥

To połowa trójkąta równobocznego.



STOSUNEK BOKÓW

(krótsza przyprostokątna = a)

$$a : a\sqrt{3} : 2a$$

krótsza przyprostokątna dłuższa przyprostokątna przeciwprostokątna

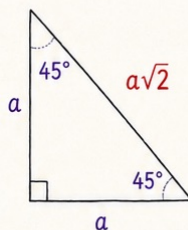
WZORY

- krótsza przyprostokątna = a
- dłuższa przyprostokątna = $a\sqrt{3}$
- przeciwprostokątna = $2a$



2. TRÓJKĄT $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ♥

To połowa kwadratu (przekątna kwadratu).



STOSUNEK BOKÓW

(przyprostokątna = a)

$$a : a : a\sqrt{2}$$

przyprostokątna przyprostokątna przeciwprostokątna

WZORY

- przyprostokątna = a
- przeciwprostokątna = $a\sqrt{2}$



3. PRZYKŁADY ♥

PRZYKŁAD 1

Krótsza przyprostokątna ma 5 cm.
Oblicz pozostałe boki.



Obliczenia:

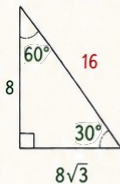
- dłuższa = $5\sqrt{3}$ cm
- przeciwprostokątna = 10 cm

Odpowiedź:

$5\sqrt{3}$ cm i 10 cm

PRZYKŁAD 2

Przeciwprostokątna ma 16 cm.
Oblicz przyprostokątne.



Obliczenia:

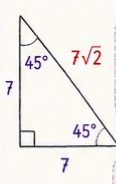
- krótsza = 8 cm
- dłuższa = $8\sqrt{3}$ cm

Odpowiedź:

8 cm i $8\sqrt{3}$ cm

PRZYKŁAD 3

Przyprostokątna ma 7 cm.
Oblicz przeciwprostokątną.



Obliczenia:

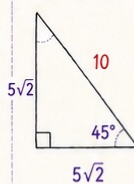
- przeciwprostokątna = $7\sqrt{2}$ cm

Odpowiedź:

$7\sqrt{2}$ cm

PRZYKŁAD 4

Przeciwprostokątna ma 10 cm.
Oblicz przyprostokątne.



Obliczenia:

- przyprostokątna = $10 : \sqrt{2}$ = $5\sqrt{2}$ cm

Odpowiedź:

$5\sqrt{2}$ cm i $5\sqrt{2}$ cm



4. JAK ROZPOZNAĆ?

- Jeśli w trójkącie prostokątnym jeden kąt ma 30° , drugi 60° → to trójkąt $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
- Jeśli oba kąty ostre mają 45° → to trójkąt $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$.

5. CO WARTO ZAPAMIĘTAĆ? ♥

- ✓ Zawsze jest to trójkąt prostokątny.
- ✓ Znajomość tych trójkątów ułatwia szybkie obliczenia.
- ✓ Stosunek boków jest stały – wystarczy znać jeden bok.
- ✓ Przydatne w zadaniach z geometrii i w trójkątach prostokątnych.

6. ZASTOSOWANIE ☆

- Obliczanie wysokości, odległości, długości odcinków.
- Zadania z Pitagorasem.
- Geometria w praktyce (np. nachylenie dachu, schody, trójkąty w naturze).

Powtarzaj
dziś –
zapamiętaj
na zawsze!



Mate kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

TWIERDZENIE PITAGORASA

W prostokątnym trójkącie suma kwadratów długości
przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości
przeciwprostokątnej.

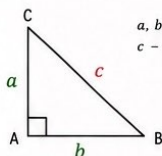
Zrozum
→ zapamiętaj
→ wykorzystaj!

1. CO TO JEST?

Twierdzenie Pitagorasa dotyczy
trójkąta prostokątnego.

Przeciwprostokątna to bok leżący
naprzeciw kąta prostego (90°).

Przyprostokątne to dwa pozostałe
boki.



a, b – przyprostokątne
 c – przeciwprostokątna

2. WZÓR

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gdzie:

a, b – długości przyprostokątnych

c – długość przeciwprostokątnej

PIĘMIĘT!

Najpierw podnosimy do kwadratu,
potem dodajemy!



3. JAK DZIAŁA?

Znając długości dwóch boków trójkąta
prostokątnego, możemy obliczyć trzeci bok.

✓ Znasz a i b – obliczasz c
(przeciwprostokątną).

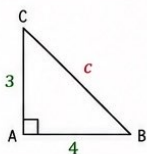
✓ Znasz a i c – obliczasz b
(przyprostokątną).

✓ Znasz b i c – obliczasz a
(przyprostokątną).



4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

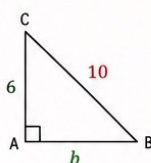
PRZYKŁAD 1: Oblicz przeciwprostokątną c ,
jeśli $a = 3$, $b = 4$.



$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\3^2 + 4^2 &= c^2 \\9 + 16 &= c^2 \\25 &= c^2 \\c &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

Odp.: $c = 5$

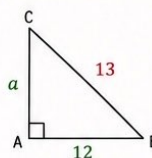
PRZYKŁAD 2: Oblicz przyprostokątną b ,
jeśli $a = 6$, $c = 10$.



$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\6^2 + b^2 &= 10^2 \\36 + b^2 &= 100 \\b^2 &= 100 - 36 \\b^2 &= 64 \\b &= \sqrt{64} = 8\end{aligned}$$

Odp.: $b = 8$

PRZYKŁAD 3: Oblicz przyprostokątną a ,
jeśli $b = 12$, $c = 13$.



$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\a^2 + 12^2 &= 13^2 \\a^2 + 144 &= 169 \\a^2 &= 169 - 144 \\a^2 &= 25 \\a &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

Odp.: $a = 5$

5. TRÓJKI PITAGOREJSKIE – gotowe zestawy liczb całkowitych

To takie trójki liczb (a, b, c), które spełniają twierdzenie Pitagorasa.

a	b	c	Sprawdzenie
3	4	5	$3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9 + 16 = 25$)
5	12	13	$5^2 + 12^2 = 13^2$ ($25 + 144 = 169$)
8	15	17	$8^2 + 15^2 = 17^2$ ($64 + 225 = 289$)
7	24	25	$7^2 + 24^2 = 25^2$ ($49 + 576 = 625$)

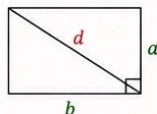
Zapamiętaj je – często pojawiają się w zadaniach!



6. ZASTOSOWANIE W PRAKTYCE

Twierdzenie Pitagorasa pomaga rozwiązywać wiele problemów
z życia codziennego.

- ✏ Obliczanie przekątnej prostokąta.
- 🏗 Obliczanie długości elementów w budownictwie.
- 📏 Wyznaczanie odległości w terenie.
- 🔍 Sprawdzanie, czy trójkąt jest prostokątny.



Przekątna prostokąta:
 $d^2 = a^2 + b^2$



7. CZY TRÓJKĄT JEST PROSTOKĄTNY?

Jeśli dla boków o długościach $a \leq b \leq c$ (c – najdłuższy bok)
zachodzi równość:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

to trójkąt jest prostokątny (kąt naprzeciw boku c ma 90°).

Przykład:

Boki: 7, 24, 25

$$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$$

Trójkąt jest prostokątny.



8. NAJCZĘSTSZE BŁĘDY

- ✗ Zapominanie o podnoszeniu do kwadratu.
- ✗ Mieszanie przyprostokątnych z przeciwprostokątną.
- ✗ Błędy w działaniach arytmetycznych.
- ✗ Brak jednostek przy odpowiedzi.

Sprawdź obliczenia
i zapisuj pełną odpowiedź!



SZYBKA ŚCIĄGA!

- $a^2 + b^2 = c^2$
- c – przeciwprostokątna (naprzeciw 90°)
- a, b – przyprostokątne
- Znając 2 boki – oblicz trzeci!
- Sprawdź: $a^2 + b^2$ czy $= c^2$?



Matematyka to nie magia – to logika i praktyka!



Mate kroki
dzisiaj - wielkie
wyniki jutro!

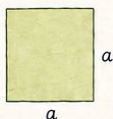
TABLICZKA FIGUR

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze wzory, które warto znać!

FIGURY PŁASKIE (2D)

KWADRAT

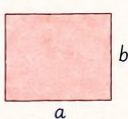


Obwód: $O = 4a$

Pole: $P = a^2$

a - długość boku

PROSTOKĄT

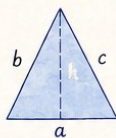


Obwód: $O = 2(a+b)$

Pole: $P = a \cdot b$

a - długość, b - szerokość

TRÓJKĄT

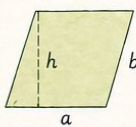


Obwód: $O = a + b + c$

Pole: $P = \frac{a \cdot h}{2}$

a - podstawa, h - wysokość

RÓWNOLEGŁOK

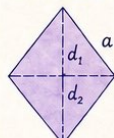


Obwód: $O = 2(a+b)$

Pole: $P = a \cdot h$

a - podstawa, h - wysokość

ROMB

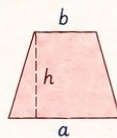


Obwód: $O = 4a$

Pole: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

d_1, d_2 - przekątne

TRAPEZ

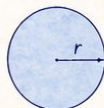


Obwód: $O = a + b + c + d$

Pole: $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

a, b - podstawy,
 h - wysokość

KOŁO



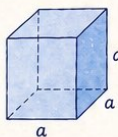
Obwód (okrąg): $O = 2\pi r$

Pole: $P = \pi r^2$

r - promień,
 $\pi \approx 3,14$

FIGURY PRZESTRZENNE (3D)

SZEŚCIAN



Pole powierzchni:

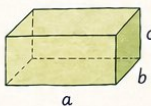
$P = 6a^2$

Objętość:

$V = a^3$

a - długość krawędzi

PROSTOKĄDŁOŚCIAN



Pole powierzchni:

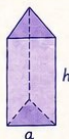
$P = 2(ab + ac + bc)$

Objętość:

$V = a \cdot b \cdot c$

a - długość, b - szerokość,
 c - wysokość

GRANIASTOŁUP PRAWIDŁOWY (TRÓJKĄTNY)



Pole podstawy:

$P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Pole powierzchni całkowitej:

$P_c = 2P_p + \text{obwód podstawy} \cdot h$

Objętość:

$V = P_p \cdot h$

a - bok podstawy,
 h - wysokość

GRANIASTOŁUP PRAWIDŁOWY (CZWOROKĄTNY)



Pole podstawy:

$P_p = a^2$

Pole powierzchni całkowitej:

$P_c = 2a^2 + 4ah$

Objętość:

$V = a^2 \cdot h$

a - bok podstawy,
 h - wysokość

OSTROSTĘP PRAWIDŁOWY (CZWOROKĄTNY)



Pole podstawy:
 $P_p = a^2$

Pole podstawy:

$P_p = a^2$

Pole powierzchni całkowitej:

$P_c = P_p + 2a \cdot l$

Objętość:

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

a - bok podstawy,
 l - apotema,
 h - wysokość

PRZYDATNE INFORMACJE

Jednostki pola:
 $\text{mm}^2, \text{cm}^2, \text{dm}^2, \text{m}^2, \text{km}^2$

$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$ $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$
 $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$

Jednostki objętości:
 $\text{mm}^3, \text{cm}^3, \text{dm}^3, \text{m}^3$

$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$

Pamiętaj o jednostkach
w odpowiedzi!

Wynik bez jednostki
jest niepełny.



PAMIĘTAJ!

- ✓ Zawsze czytaj uważnie treść zadania.
- ✓ Zaznacz dane na rysunku.
- ✓ Wybierz odpowiedni wzór.
- ✓ Sprawdź wynik i jednostki.



Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

RODZAJE KĄTÓW

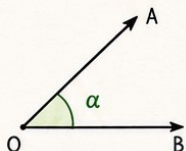
ZAPAMIĘTAJ I WYKORZYSTAJ!

Zrozum,
zapamiętaj,
wykorzystaj!

1. KĄT OSTRY

Miara kąta jest większa od 0°
i mniejsza od 90° .

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



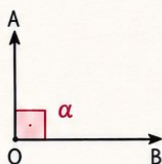
Przykład:

$$\alpha = 45^\circ$$

2. KĄT PROSTY

Miara kąta jest równa 90° .

$$\alpha = 90^\circ$$



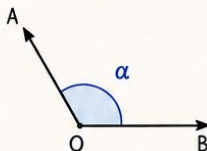
Przykład:

$$\alpha = 90^\circ$$

3. KĄT ROZWARTY

Miara kąta jest większa od 90°
i mniejsza od 180° .

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



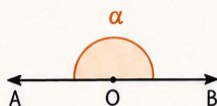
Przykład:

$$\alpha = 120^\circ$$

4. KĄT PÓŁPEŁNY

Miara kąta jest równa 180° .

$$\alpha = 180^\circ$$



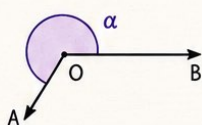
Przykład:

$$\alpha = 180^\circ$$

5. KĄT WKŁĘŚŁY

Miara kąta jest większa od 180°
i mniejsza od 360° .

$$180^\circ < \alpha < 360^\circ$$



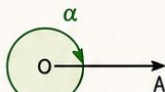
Przykład:

$$\alpha = 240^\circ$$

6. KĄT PEŁNY

Miara kąta jest równa 360° .

$$\alpha = 360^\circ$$



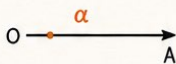
Przykład:

$$\alpha = 360^\circ$$

7. KĄT ZEROWY

Miara kąta jest równa 0° .

$$\alpha = 0^\circ$$



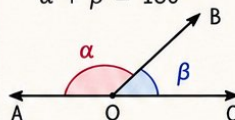
Przykład:

$$\alpha = 0^\circ$$

8. KĄTY PRZYLEGŁE

Dwa kąty, które mają wspólne
ramię, a pozostałe ramiona leżą
na jednej prostej.
Ich suma jest równa 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



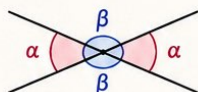
Przykład:

$$\alpha = 110^\circ, \beta = 70^\circ$$

WYBRANE RELACJE MIĘDZY KĄTAMI

KĄTY WIERZCHOŁKOWE

Są równe



$$\alpha = \alpha$$

$$\beta = \beta$$

KĄTY NAPRZEMIANIOWE

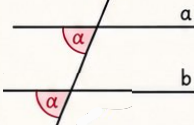
Są równe



$$\alpha = \alpha$$

KĄTY ODPOWIEDAJĄCE

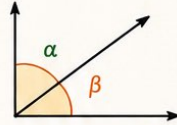
Są równe



$$\alpha = \alpha$$

KĄTY DOPEŁNIAJĄCE

Suma kątów = 90°

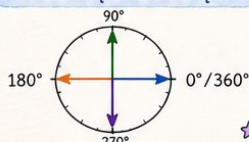


$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

PAMIĘTAJ!

- ✓ Kąt mierzymy w stopniach ($^\circ$).
- ✓ Wierzchołek kąta to punkt wspólny ramion.
- ✓ Ramiona kąta to półproste wychodzące z wierzchołka.
- ✓ Kąty można dodawać i odejmować.

MIARA KĄTA NA OKRĘGU



Mate kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA SKALA PODOBIEŃSTWA

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Skala podobieństwa pokazuje, ile razy jedna figura
jest powiększona lub pomniejszona w stosunku do drugiej.

1. CO TO JEST SKALA PODOBIEŃSTWA?

To stosunek odpowiadających sobie długości
w dwóch podobnych figurach.

ZAPIS SKALI PODOBIEŃSTWA:

$$k = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = \dots$$

gdzie:

k – skala podobieństwa

$k > 1$ – powiększenie

$0 < k < 1$ – pomniejszenie

$k = 1$ – figura nie zmienia rozmiaru

2. JAK DZIAŁA SKALA?

- $k > 1 \rightarrow$ figura jest powiększona
- $0 < k < 1 \rightarrow$ figura jest pomniejszona
- $k = 1 \rightarrow$ figura jest taka sama

PRZYKŁAD:

Jeśli $k = 3$, to wszystkie długości
w drugiej figurze są 3 razy większe.

Jeśli $k = \frac{1}{2}$, to wszystkie długości
w drugiej figurze są 2 razy mniejsze.

3. CO SIĘ ZMIENIA A CO NIE?

- ☒ ZMIENIA SIĘ:
długości boków, obwód, pole, objętość
- ☒ NIE ZMIENIA SIĘ:
kształt figur, miary kątów



PAMIĘTAJ!

Figury podobne mają takie same kąty,
a ich boki są proporcjonalne.

4. WZORY – JAK LICZYĆ?

DŁUGOŚCI

$$k = \frac{\text{długość w figurze 2}}{\text{długość w figurze 1}}$$

$$d_2 = k \cdot d_1 \quad \text{lub} \quad d_1 = \frac{d_2}{k}$$

gdzie d – odpowiadające sobie boki



POLA FIGUR PŁASKICH

Pola zmieniają się w k^2 razy.

$$P_2 = k^2 \cdot P_1 \quad \text{lub} \quad P_1 = \frac{P_2}{k^2}$$

gdzie P – pole figury

- $k = 2 \rightarrow$ pole 4 razy większe
- $k = \frac{1}{2} \rightarrow$ pole 4 razy mniejsze

OBJĘTOŚCI FIGUR PRZESTRZENNYCH

Objętości zmieniają się w k^3 razy.

$$V_2 = k^3 \cdot V_1 \quad \text{lub} \quad V_1 = \frac{V_2}{k^3}$$

gdzie V – objętość figury

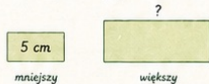
- $k = 2 \rightarrow$ objętość 8 razy większa
- $k = \frac{1}{2} \rightarrow$ objętość 8 razy mniejsza



5. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

PRZYKŁAD 1 – DŁUGOŚCI

Dwa podobne prostokąty mają skalę $k = 3$.
Dłuższy bok mniejszego prostokąta ma 5 cm.
Ile cm ma odpowiadający mu bok większego?

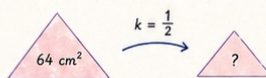


$$k = 3 \rightarrow d_2 = k \cdot d_1 = 3 \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

Odpowiedź: 15 cm

PRZYKŁAD 2 – POLE

Dwa podobne trójkąty mają skalę $k = \frac{1}{2}$.
Pole większego trójkąta wynosi 64 cm².
Jakie jest pole mniejszego trójkąta?

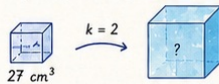


$$P_2 = k^2 \cdot P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 64 = \frac{1}{4} \cdot 64 = 16 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: 16 cm²

PRZYKŁAD 3 – OBJĘTOŚĆ

Śześcian i jego model mają skalę $k = 2$.
Objętość modelu (mniejszego) wynosi 27 cm³.
Jaka jest objętość dużego śześcianu?



$$V_2 = k^3 \cdot V_1 = 2^3 \cdot 27 = 8 \cdot 27 = 216 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: 216 cm³

6. WAŻNE WSKAZÓWKI

- ☒ Sprawdź, które boki (lub krawędzie) są odpowiadające sobie.
- ☒ Policz skalę k z długości (zawsze od mniejszej do większej).
- ☒ Pamiętaj: pole $\rightarrow k^2$, objętość $\rightarrow k^3$.
- ☒ Zawsze zapisz jednostkę w odpowiedzi!

7. SZYBKA ŚCIĄGA

CO ZMIENIAMY?	JAK?	PRZYKŁAD DLA $k = 2$
DŁUGOŚCI	$\cdot k$	5 cm $\rightarrow$ 10 cm
POLE	$\cdot k^2$	5 cm ² $\rightarrow$ 20 cm ²
OBJĘTOŚĆ	$\cdot k^3$	5 cm ³ $\rightarrow$ 40 cm ³

8. CHECKLISTA

- ☐ Czy figury są podobne?
- ☐ Czy ustaliłem skalę k ?
- ☐ Czy odpowiednie boki są dobrane?
- ☐ Czy użyłem właściwego wzoru?
- ☐ Czy wynik ma jednostkę?



Małe kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

≡ PRAWDOPODOBIEŃSTWO ≡



1. CO TO JEST PRAWDOPODOBIEŃSTWO?

Prawdopodobieństwo zdarzenia to iloraz liczby wyników sprzyjających temu zdarzeniu i liczby wszystkich możliwych wyników.

Wzór:

$$P(A) = \frac{\text{liczba wyników sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników}}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Często zapisujemy w procentach: $P(A) \cdot 100\%$

PAMIĘTAJ!



✓ Prawdopodobieństwo wyrażamy liczbą z przedziału $[0,1]$.

✓ 0 – zdarzenie niemożliwe

✓ 1 – zdarzenie pewne

2. KLASYCZNE PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Dotyczy sytuacji, w których wszystkie wyniki są jednakowo możliwe.

Wzór:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

gdzie:

m – liczba wyników sprzyjających zdarzeniu A

n – liczba wszystkich możliwych wyników

Przykład:

Rzucamy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba 4.

Wyniki sprzyjające: $\{4\}$ – 1 wynik

Wszystkie wyniki: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – 6 wyników

$$P(4) = \frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%$$



3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

PRZYKŁAD 1

Rzut kostką do gry

Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba większa od 4.



Wyniki sprzyjające: $\{5, 6\}$ – 2 wyniki

Wszystkie wyniki: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – 6 wyników

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,333 = 33,3\%$$

PRZYKŁAD 2

Rzut monetą

Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł.



Wyniki sprzyjające: $\{\text{orzeł}\}$ – 1 wynik

Wszystkie wyniki: $\{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$ – 2 wyniki

$$P = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

PRZYKŁAD 3

Losowanie kuli z woreczka

W woreczku są kule: 2 czerwone, 3 niebieskie i 1 zielona.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej.



Wyniki sprzyjające: 3 niebieskie – 3 wyniki

Wszystkie wyniki: $2+3+1=6$ wyników

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

PRZYKŁAD 4

Losowanie kuli z numerem

W pudełku są kulki ponumerowane od 1 do 10. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2.



Wyniki sprzyjające: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ – 5 wyników

Wszystkie wyniki: 10 wyników

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

4. ZDARZENIA SZCZEGÓLNE

- Zdarzenie niemożliwe – nie może zajść.
Prawdopodobieństwo = 0.
- Zdarzenie pewne – zawsze zajdzie.
Prawdopodobieństwo = 1.

Sytuacja	Zdarzenie	Prawdopodobieństwo
Rzut kostką	Wypadnie liczba 7	0 (niemożliwe)
Rzut kostką	Wypadnie liczba z przedziału 1–6	1 (pewne)
Rzut monetą	Wypadnie orzeł lub reszka	1 (pewne)
Losowanie kuli z woreczka: 2 czerwone	Wylosujemy kulę zieloną	0 (niemożliwe)

5. ZDARZENIA DOPEŁNIAJĄCE

Dwa zdarzenia są dopełniające – gdy zajdzie jedno z nich, drugie nie może zajść i odwrotnie.

Suma prawdopodobieństw zdarzeń dopełniających wynosi 1.

Wzór:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

gdzie $\bar{A}$ – zdarzenie przeciwne do A .

Przykład:

Rzucamy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba 3.

$$\bullet \text{ Zdarzenie } A: \text{„wypadnie 3”} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \text{ Zdarzenie } \bar{A}: \text{„nie wypadnie 3”} \rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$



6. ZADANIA

ZADANIE 1

Rzut kostką

Rzucono kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia:

- liczby parzystej
- liczby mniejszej od 3
- liczby większej od 6
- liczby pierwszej



ZADANIE 2

Rzut monetą

Monetę rzucono dwa razy. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- dwoch orłów
- orła i reszki (w dowolnej kolejności)
- co najmniej jednego orła



ZADANIE 3

Woreczek z kulami

W woreczku są kule: 3 czerwone, 2 niebieskie, 1 zielona i 4 żółte. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- kuli czerwonej
- kuli niebieskiej
- kuli żółtej
- kuli innego koloru niż zielona



ZADANIE 4

Karty

Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania karty:

- kier
- koloru czerwonego
- asa
- królewskiej (walet, dama, król)



PAMIĘTAJ!

- ✓ Zawsze ustal, ile jest wszystkich możliwych wyników.
- ✓ Policz, ile z nich sprzyja zdarzeniu.
- ✓ Podstaw do wzoru i oblicz prawdopodobieństwo.

Regularna nauka = pewność na sprawdzianie!



Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

DANE STATYSTYCZNE



1. TABELA

Dane przedstawione w postaci wierszy i kolumn.

Przykład:

Liczba książek przeczytanych w miesiącu przez uczniów klasy.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów	2	6	10	8	3	1

Możemy odczytać np.:

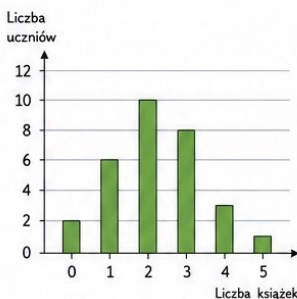
- Najwięcej uczniów przeczytało 2 książki.
- Żaden uczeń nie przeczytał więcej niż 5 książek.
- W klasie jest $2+6+10+8+3+1 = 30$ uczniów.

2. DIAGRAM SŁUPKOWY

Słupki pokazują wielkość danej wartości.

Przykład:

Liczba uczniów według liczby książek.



Możemy odczytać te same informacje co w tabeli.

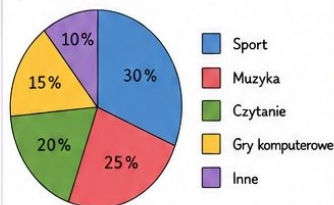
3. DIAGRAM KOŁOWY (SEKTOROWY)

Całość to 100%.

Każdy sektor pokazuje, jaką część całości stanowi dana wartość.

Przykład:

Sposób spędzania wolnego czasu przez uczniów.



Najwięcej uczniów spędza czas na sporcie (30%), a najmniej na innych zajęciach (10%).

4. ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna to iloraz sumy wszystkich i ich liczby.

Wzór:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

gdzie: $x_1, x_2, \dots, x_n$ – wartości danych

n – liczba danych

Przykład:

Oblicz średnią ocen z kartkówki:

5, 4, 3, 5, 2, 4.

Obliczenia:

Suma ocen: $5+4+3+5+2+4 = 23$

Liczba ocen: $n = 6$

Średnia: $\bar{x} = \frac{23}{6} \approx 3,83$

Odp.: Średnia ocen wynosi około 3,83.

5. MEDIANA

Mediana to wartość środkowa w uporządkowanym (rosnąco) zbiorze danych.

- Gdy liczba danych jest nieparzysta – mediana to środkowa wartość.
- Gdy liczba danych jest parzysta – mediana to średnia z dwóch środkowych wartości.

Przykład 1 (nieparzysta liczba danych):

Dane: 2, 5, 1, 7, 3

Uporządkuj: 1, 2, 3, 5, 7

Mediana: 3 (środkowa wartość)

Przykład 2 (parzysta liczba danych):

Dane: 4, 1, 8, 6, 3, 5

Uporządkuj: 1, 3, 4, 5, 6, 8

Środkowe wartości: 4 i 5

Mediana: $\frac{4+5}{2} = 4,5$

1. TABELA

W tabeli przedstawiono liczbę bramek zdobytych w meczu przez drużynę.

Liczba bramek	0	1	2	3	4
Liczba meczów	2	5	6	4	3

- Ile meczów rozegrano?
- W którym wyniku padło najwięcej bramek?
- Jaki wynik padł w najmniejszej liczbie meczów?

6. PRZYKŁADOWE ZADANIA

2. ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

7, 3, 5, 9, 6.

3. MEDIANA

Oblicz medianę danych:

- 4, 1, 7, 3, 5
- 8, 2, 6, 4

PAMIĘTAJ!



- Czytaj uważnie treść zadania.
- Zwracaj uwagę na jednostki i to, o co pytają.
- Sprawdzaj obliczenia i zapisz pełną odpowiedź.

Regularna nauka = pewność na sprawdzianie! ♥

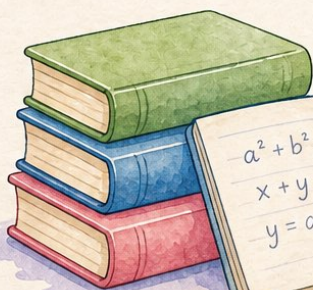
≡ DOTARŁEŚ ≡
AŻ DO TEGO MOMENTU

TO JUŻ OGROMNY KROK! ♥

Wykorzystaj całą wiedzę,
którą zdobyłeś.

Zaufaj sobie
i działaj krok po kroku.

≡ JESTEŚ BLISKO ≡
OSIĄGNIĘCIA
CELU! ♥



Sukces to suma
małych wysiłków,
powtarzanych dzień po dniu.

– Robert Collier