



Matma na Walizkach
— Agata Suliga —

WYPRAWKA MATURZYSTY

TWOJA DROGA DO NATURALNEGO SUKCESU! ♥



Wszystko,
czego potrzebujesz,
masz w sobie!



ZROZUM



ĆWICZ



POWTARZAJ



OŚIĄGAJ

DOBRE ZAPLANOWANA NAUKA TO KLUCZ DO SUKCESU! ♥



÷ TABLICZKA ÷

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Kilka wzorów – dużo czasu zaoszczędzonego! ♥

1 KWADRAT SUMY

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń to suma kwadratów tych wyrażeń powiększona o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

PRZYKŁAD:

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

2 KWADRAT RÓŻNICY

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń to suma kwadratów tych wyrażeń pomniejszona o podwojony iloczyn tych wyrażeń.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

	a	b
a	a^2	$-ab$
b	$-ab$	b^2

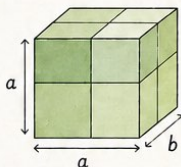
PRZYKŁAD:

$$\begin{aligned}(2x - 5)^2 &= \\ &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 \\ &= 4x^2 - 20x + 25\end{aligned}$$

3 SUMA SZEŚCIANÓW

Suma sześciątów dwóch wyrażeń to iloczyn ich sumy oraz sumy kwadratów tych wyrażeń pomniejszonej o ich iloczyn.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$



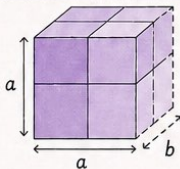
PRZYKŁAD:

$$\begin{aligned}x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 = \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)\end{aligned}$$

4 RÓŻNICA SZEŚCIANÓW

Różnica sześciątów dwóch wyrażeń to iloczyn ich różnicy oraz sumy kwadratów tych wyrażeń powiększonej o ich iloczyn.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



PRZYKŁAD:

$$\begin{aligned}x^3 - 27 &= x^3 - 3^3 = \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)\end{aligned}$$

5 RÓŻNICA KWADRATÓW

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń to iloczyn ich sumy oraz różnicy.

PRZYKŁAD:

$$\begin{aligned}x^2 - 16 &= x^2 - 4^2 = \\ &= (x - 4)(x + 4)\end{aligned}$$

KIEDY STOSOWAĆ?

- ★ Gdy widzisz sumę lub różnicę w nawiasie podniesioną do kwadratu – użyj wzorów 1 lub 2.
- ★ Gdy masz sumę lub różnicę sześciątów – użyj wzorów 3 lub 4.
- ★ Gdy masz różnicę kwadratów – użyj wzoru 5.



SZYBKA CHECKLISTA

- ☒ Czy rozpoznaje odpowiedni wzór?
- ☒ Czy poprawnie podpisałem a i b?
- ☒ Czy znaki są poprawne?
- ☒ Czy mogę coś jeszcze uprościć?



PAMIĘTAJ!

Znajomość wzorów skróconego mnożenia oszczędza czas i pomaga unikać błędów!



Ćwicz regularnie – to się optaca! 😊



CIĄGI LICZBOWE

SZYBKA POWTÓRKA

Zrozum wzór -
narysuj sukces!

1 CIĄG ARYTMETYCZNY

wzór na n -ty wyraz

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

gdzie:

a_1 - pierwszy wyraz
 r - różnica
 n - numer wyrazu
($n \geq 1$)

CO TO ZNACZY?

każdy kolejny wyraz różni się o stałą liczbę r (dodajemy r)

PRZYKŁAD:

2, 5, 8, 11, 14, ...

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3 \quad r = 3$

WZÓR NA SUMĘ PIERWSZYCH n WYRAZÓW

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

PRZYKŁAD:

$a_1 = 2, r = 3, n = 5$

$a_5 = 2 + (5-1) \cdot 3 = 14$

$$S_5 = \frac{(2+14) \cdot 5}{2} = \frac{16 \cdot 5}{2} = 40$$

JAK ZNALEZĆ RÓŻNICĘ r ?

$$r = a_{n+1} - a_n$$

(pamiętaj, że r jest stałe!)

PRZYKŁAD:

2, 5, 8, 11, ...

$$r = 5 - 2 = 3$$

2 CIĄG GEOMETRYCZNY

wzór na n -ty wyraz

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

gdzie:

a_1 - pierwszy wyraz
 q - iloraz
 n - numer wyrazu
($n \geq 1, q \neq 0$)

CO TO ZNACZY?

każdy kolejny wyraz mnożymy przez tę samą liczbę q

PRZYKŁAD:

2, 4, 8, 16, 32, ...

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad q = 2$

WZÓR NA SUMĘ PIERWSZYCH n WYRAZÓW (dla $q \neq 1$)

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

PRZYKŁAD:

$a_1 = 2, q = 2, n = 5$

$$S_5 = 2 \cdot \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 2 \cdot \frac{1 - 32}{-1} = 2 \cdot 31 = 62$$

JAK ZNALEZĆ ILORAZ q ?

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(pamiętaj, że q jest stałe!)

PRZYKŁAD:

2, 4, 8, 16, ...

$$q = \frac{4}{2} = 2$$

3 JAK ROZPOZNAĆ, Z JAKIM CIĄGIEM MAMY DO CZYNNIENIA?

jeśli **DODAJESZ** tę samą liczbę

1, 4, 7, 10, 13, ...

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

→ ciąg
arytmetyczny



jeśli **MNOŻYSZ** przez tę samą liczbę

3, 6, 12, 24, 48, ...

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

→ ciąg
geometryczny

4 NAJCZĘŚCIEJ SPOTYKANE ZADANIA

- znajdź n -ty wyraz ciągu
- znajdź sumę n pierwszych wyrazów
- znajdź różnicę r lub iloraz q
- znajdź brakujący wyraz
- sprawdź, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny



PRZYKŁAD - ciąg arytmetyczny

$a_1 = 5, r = -2$

$a_6 = 5 + (6-1)(-2) = 5 - 10 = -5$

$$S_6 = \frac{(5 + (-5)) \cdot 6}{2} = 0$$



PRZYKŁAD - ciąg geometryczny

$a_1 = 3, q = -2$

$a_6 = 3 \cdot (-2)^5 = 3 \cdot (-32) = -96$

$$S_6 = 3 \cdot \frac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = 3 \cdot \frac{1 - 64}{3} = -63$$



5 NAJCZĘSTSZE BŁĘDY

- ⊗ pomylenie r (różnica) z q (ilorazem)
- ⊗ zły wzór na n -ty wyraz
- ⊗ błędne podstawienie n (zaczynamy od $n = 1$!)
- ⊗ błędy przy potęgach (szczególnie w ciągach geometrycznych)
- ⊗ zapominanie o nawiasach i znakach minus



6 PRO TIP!



- zawsze wypisz kilka pierwszych wyrazów - zobaczysz schemat!
- sprawdź, czy ciąg rośnie, maleje, czy jest stały
- jeśli masz wątpliwości - policz pierwsze 2-3 wyrazy
- wzory zapamiętaj, a resztę wyprowadzisz ze spokoju!



7 WAŻNE DO ZAPAMIĘTANIA!

ARYTMETYCZNY

- dodajemy r
- różnica stała
- wzór na a_n
- $a_n = a_1 + (n-1)r$

GEOMETRYCZNY

- mnożymy przez q
- iloraz stały
- wzór na a_n
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

PAMIĘTAJ!

Ćwicz regularnie - teoria + praktyka = sukces!



PAMIĘTAJ!



• n zaczyna się od 1

• a_1 to pierwszy wyraz

• r - różnica (dodawanie)

• q - iloraz (mnożenie)



FUNKCJA LINIOWA

NAJWAŻNIEJSZE POJĘCIA I WZORY

Funkcja liniowa ma postać:

$$f(x) = ax + b$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

a – współczynnik kierunkowy
(nachylenie prostej)

b – wyraz wolny
(przecięcie z osią OY)

1. CO OZNACZAJĄ WSPÓŁCZYNNIKI?

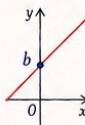
a) WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY a (NACHYLENIE PROSTEJ)

- określa, czy prosta rośnie, maleje, czy jest stała (gdy $a = 0$).
- im większe $|a|$, tym prosta jest bardziej stroma.

a	znak a	wykreś	znaczenie
$a > 0$	dodatni		prosta rośnie
$a < 0$	ujemny		prosta maleje
$a = 0$	zero		prosta równoległa do osi OX

b) WYRAZ WOLNY b (PRZECIĘCIE Z OŚIĄ OY)

- to wartość funkcji dla $x = 0$.
- punkt przecięcia prostej z osią OY to $(0, b)$.



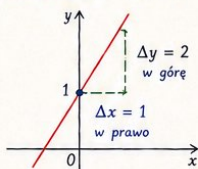
2. JAK NARYSOWAĆ PROSTĄ?

Wystarczy 2 punkty!

A. Znajdź b i a

- Zaznacz punkt $(0, b)$.
- Skorzystaj z nachylenia $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
 - idź w prawo o Δx
 - idź w górę (lub w dół) o Δy
- Połącz punkty prostą.

PRZYKŁAD: $f(x) = 2x + 1$



B. Znajdź dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$

- Zaznacz oba punkty w układzie współrzędnych.
- Połącz je prostą.



Przez dwa różne punkty prowadzi dokładnie jedna prosta!

3. WAŻNE INFORMACJE

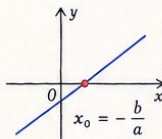
MIJESCE ZEROWE

To punkt przecięcia z osią OX.

Otrzymujemy je z równania $f(x) = 0$.

$$ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

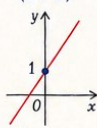


MONOTONICZNOŚĆ

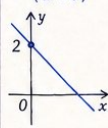
- $a > 0 \rightarrow$ funkcja rosnąca w $\mathbb{R}$
- $a < 0 \rightarrow$ funkcja malejąca w $\mathbb{R}$
- $a = 0 \rightarrow$ funkcja stała $f(x) = b$

PRZYKŁADY

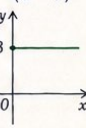
$$f(x) = 2x + 1 \quad (a > 0)$$



$$f(x) = -x + 2 \quad (a < 0)$$



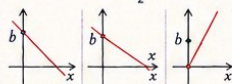
$$f(x) = 3 \quad (a = 0)$$



4. ZMIANA FUNKCJI – CO SIĘ ZMIAENIA NA WYKRESIE?

ZMIANA a (nachylenia) b bez zmian

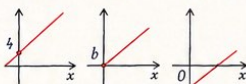
$$a = -2 \quad a = -\frac{1}{2} \quad a = 2$$



bardziej stroma (maleje szybciej) łagodniejsza rośnie

ZMIANA b (przesunięcie w górę/w dół) a bez zmian

$$b = 2 \quad b = 0 \quad b = -2$$



przesunięcie w górę bez zmian przesunięcie w dół

5. PRZYPADNE WZORY I ZALEŻNOŚCI

- ✓ nachylenie prostej przechodzącej przez punkty P_1, P_2 : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- ✓ równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(x_0, y_0)$ o nachyleniu a : $y - y_0 = a(x - x_0)$
- ✓ równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- ✓ punkt przecięcia z OX: $x_0 = -\frac{b}{a}$
- ✓ punkt przecięcia z OY: $(0, b)$



NAJCZĘSTSZE BŁĘDY



- ✗ Mylenie a (nachylenie) z b (wyraz wolny).
- ✗ Błędne obliczanie miejsca zerowego.
- ✗ Zły znak przy nachyleniu (prosta „idzie w złą stronę”).
- ✗ Rysowanie prostej tylko na podstawie jednego punktu.

PRO TIP!



- ✓ Zapamiętaj: a mówi, jak prosta jest nachylona, b mówi, gdzie przecina oś OY.
- ✓ Zawsze sprawdź punkt $(0, b)$ – to dobry start!
- ✓ Dwa punkty = prosta gotowa! ✓



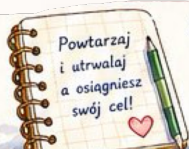
PIĘMIĘTAJ!



Funkcja liniowa opisuje wiele sytuacji z życia codziennego:

- stała prędkość
- koszt całkowity = koszt jednostkowy $\cdot$ ilość + opłata stała
- zakres temperatury w czasie

Warto to zrozumieć, nie tylko zapamiętać!





Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

FUNKCJA KWADRATOWA

PRZYPOMNIENIE

Zrozum wzór –
narysuj sukces!

Funkcja kwadratowa ma postać ogólną:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b, c – liczby rzeczywiste
 $a \neq 0$

1 POSTAĆ OGÓLNA

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

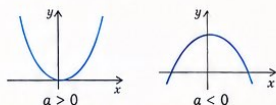
DO CZEGO SŁUŻY?

- zapis funkcji kwadratowej
- obliczanie delty (Δ)
- znajdowanie miejsc zerowych
- wyznaczanie współrzędnych wierzchołka

CO OZNACZAJĄ WSPÓŁCZYNNIKI?

a kierunek ramion paraboli

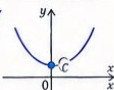
$a > 0 \rightarrow$ ramiona w górę
 $a < 0 \rightarrow$ ramiona w dół



|a| szerokość paraboli

$|a|$ większe $\rightarrow$ parabola węższa
 $|a|$ mniejsze $\rightarrow$ parabola szersza

c przecięcie z osią OY
punkt $(0, c)$



DELTA (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0 \rightarrow 2$ miejsca zerowe

$\Delta = 0 \rightarrow 1$ miejsce zerowe

$\Delta < 0 \rightarrow$ brak miejsc zerowych

2 POSTAĆ ILOCZYNOWA

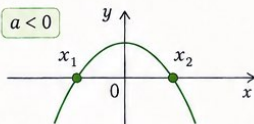
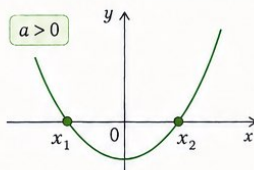
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

DO CZEGO SŁUŻY?

- odczyt miejsc zerowych

CO WIDAĆ OD RAZU?

- miejsca zerowe: x_1 i x_2
- przecięcia z osią OX:
 $(x_1, 0)$ oraz $(x_2, 0)$



ZWIĄZKI MIĘDZY
WSPÓŁCZYNNIKAMI:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

3 POSTAĆ KANONICZNA

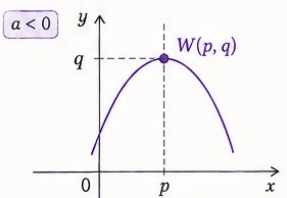
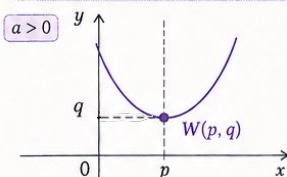
$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

DO CZEGO SŁUŻY?

- odczyt wierzchołka
- rysowanie wykresu
- badanie własności funkcji

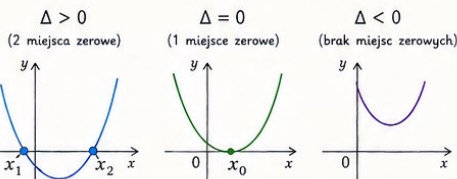
CO WIDAĆ OD RAZU?

- wierzchołek: $W(p, q)$
- oś symetrii: $x = p$
- wartość najmniejsza ($a > 0$)
lub największa ($a < 0$) = q



JAK WYGLĄDA WYKRES?

- Parabola ma kształt „U” lub „∩”.
- Ma jedną oś symetrii.
- Może przecinać oś OX w 0, 1 lub 2 punktach.
- Kształt i położenie zależą od a, b, c (lub p, q).



ZNAK a

- $a > 0 \rightarrow$ ramiona w górę
- $a < 0 \rightarrow$ ramiona w dół

PRZECIĘCIE Z OŚIĄ OY

$f(0) = c \rightarrow$ punkt $(0, c)$



NAJČĘSZCZE BŁĘDY

- ☒ Mylenie znaków w postaci kanonicznej $(x - p)^2 \neq x^2 - p^2$
- ☒ Zły znak przy miejscach zerowych w postaci iloczynowej
- ☒ Pomijanie współczynnika a (odwraca wykres!)
- ☒ Błędne obliczenie delty $\Delta = b^2 - 4ac$
- ☒ Brak uwagi na to, co dana postać „pokazuje od razu”

JAK WYBRAĆ POSTAĆ?

- ☒ Chcesz znaleźć miejsca zerowe $\rightarrow$ postać iloczynowa
- ☒ Chcesz znaleźć wierzchołek $\rightarrow$ postać kanoniczna
- ☒ Masz dane współczynniki $a, b, c \rightarrow$ postać ogólna
- ☒ Chcesz narysować wykres $\rightarrow$ kanoniczna (najszybciej)

PRO TIP!

Zawsze sprawdź problem do tego, co dana postać pokazuje od razu – oszczędzisz czas i unikniesz błędów!

SZYBKI SPOSÓB NA WSPÓŁRZĘDNĄ p WIERZCHOŁKA

Jeśli znasz miejsca zerowe x_1, x_2 ,
to współrzędną p (środek między nimi) to:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

PRZYKŁAD:

$$x_1 = 2, x_2 = 6$$

$$p = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

Wierzchołek ma $x = 4$.

Ćwicz regularnie –
efekty przyjdą!





ZADANIA OPTYMALIZACYJNE

Szukamy największych i najmniejszych wartości! ♥

SCHEMAT ZADANIA OPTYMALIZACYJNEGO ♥

1. ROBIMY WZÓR FUNKCJI KWADRATOWEJ I ZAŁOŻENIA

- zapisujemy funkcję, którą mamy zoptymalizować (np. zysk, pole itp.)
- zapisujemy założenia (ograniczenia)



2. LICZYMY p (X-WIERZCHOŁKOWY)

- korzystamy ze wzoru $p = -\frac{b}{2a}$
- otrzymujemy x , dla którego funkcja osiąga ekstremum (max lub min)



3. SPRAWDZAMY CO JESZCZE OD NAS CHCĄ

- sprawdzamy założenia (czy p należy do dozwolonego przedziału)
- liczymy wartość funkcji dla p (y-wierzchołkowy) = największy/najmniejszy zysk, pole, koszt itp.



4. KOŃCZYMY

- zapisujemy odpowiedź pełnym zdaniem wraz z jednostką.



PAMIĘTAJ!

- ✓ Zawsze zapisz założenia!
- ✓ p to liczba sprzedanych/wytworzonych sztuk, dla której funkcja ma ekstremum.
- ✓ Sprawdź, czy p spełnia warunki z zadania.
- ✓ Odpowiedź zapisz pełnym zdaniem i jednostką.

PRZYKŁAD

Zakład stolarski produkuje krzesła, które sprzedaje po 196 złotych za sztukę. Właściciel, na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków, stwierdził, że:

- przychód P (w złotych) ze sprzedaży x krzesel można opisać funkcją $P(x) = 196x$
- koszt K (w złotych) produkcji x krzesel dziennie można opisać funkcją $K(x) = 4x^2 + 4x + 240$

Dziennie w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 30 krzesel.

Oblicz, ile krzesel powinien dziennie sprzedawać zakład, aby zysk ze sprzedaży krzesel wyprodukowanych przez ten zakład w ciągu jednego dnia był możliwie największy. Oblicz ten największy zysk.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

ROZWIĄZANIE

1. Robimy wzór funkcji i założenia.

Zysk to różnica przychodu i kosztów:

$$Z(x) = P(x) - K(x) = 196x - (4x^2 + 4x + 240)$$

$$Z(x) = -4x^2 + 192x - 240$$

$$\text{Założenie: } 0 \leq x \leq 30$$

2. Liczymy p (x-wierzchołkowy).

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{192}{2 \cdot (-4)} = \frac{192}{8} = 24$$

3. Sprawdzamy co jeszcze od nas chcą.

Sprawdzamy założenie: $24 \in [0; 30]$ ✓

Liczymy wartość funkcji dla $p = 24$.

$$Z(24) = -4 \cdot 24^2 + 192 \cdot 24 - 240$$

$$Z(24) = -4 \cdot 576 + 4608 - 240$$

$$Z(24) = -2304 + 4608 - 240 = 2064$$

4. Kończymy.

Aby zysk był możliwie największy, zakład powinien dziennie sprzedawać 24 krzesła.

Największy zysk wynosi 2064 zł. ♥



Małe kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA STATYSTYKI

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze pojęcia i wzory

1. ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna to suma wszystkich wartości podzielona przez ich liczbę.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna
 x_i – kolejne wartości danych
 n – liczba wszystkich danych

PRZYKŁAD:

Dane: 2, 4, 7, 3, 6

Suma: $2 + 4 + 7 + 3 + 6 = 22$

Liczba danych: $n = 5$

$$\bar{x} = \frac{22}{5} = 4,4$$

Średnia arytmetyczna wynosi 4,4.

2. MEDIANA (WARTOŚĆ ŚRODKOWA)

Mediana to wartość środkowa w uporządkowanym rosnąco zestawie danych.

Gdy liczba danych jest **NIEPARZYSTA**:

Mediana to środkowa wartość.

Gdy liczba danych jest **PARZYSTA**:

Mediana to średnia arytmetyczna dwóch środkowych wartości.

PRZYKŁADY:

1) Dane (nieparzysta liczba danych):

2, 3, 5, 7, 9 → mediana = 5

2) Dane (parzysta liczba danych):

1, 3, 4, 8 → mediana = $\frac{3 + 4}{2} = 3,5$

3. MODA (DOMINANTA)

Moda to wartość, która występuje najczęściej w zestawie danych.

PRZYKŁADY:

1) Dane: 2, 4, 4, 6, 7, 4, 3

Moda = 4 (bo liczba 4 występuje 3 razy)

2) Dane: 1, 2, 3, 4, 5

Moda: brak (każda wartość występuje 1 raz)

3) Dane: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4

Moda = 4 (występuje najczęściej)

Uwaga!

Zestaw danych może mieć więcej niż jedną modę lub nie mieć jej wcale.

4. ROZSTĘP (ZASIĘG)

Rozstęp to różnica między największą a najmniejszą wartością w zestawie danych.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

PRZYKŁAD:

Dane: 3, 7, 2, 9, 5

$x_{\max} = 9$ (największa wartość)

$x_{\min} = 2$ (najmniejsza wartość)

$$R = 9 - 2 = 7$$

Rozstęp wynosi 7.



5. JAK PRZEDSTAWIAĆ DANE?

TABELA CZĘSTOŚCI

Porządkujemy dane w tabeli – podajemy wartość i liczbę jej wystąpień.

PRZYKŁAD:

Wyniki testu uczniów:

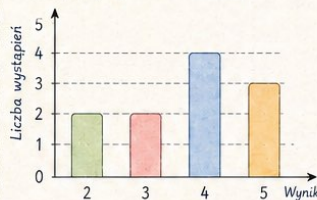
4, 3, 5, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 2, 4

Wynik (x_i)	2	3	4	5
Liczba wystąpień (n_i)	2	2	4	3

DIAGRAM SŁUPKOWY

Służy do przedstawiania danych w sposób graficzny.

PRZYKŁAD (na podstawie tabeli obok):



6. WAŻNE WSKAZÓWKI

- ✓ Zawsze uporządkuj dane od najmniejszej do największej przed wyznaczeniem mediany.
- ✓ Sprawdź, czy policzyłeś wszystkie dane.
- ✓ Zwróć uwagę na jednostki (np. cm, zł, kg).
- ✓ Wynik zawsze ma sens – zastanów się, czy jest możliwy.



7. PRZYKŁAD Z ZASTOSOWANIEM

Dane: liczba zdobytych punktów przez uczniów z klasówki: 6, 3, 5, 4, 3, 6, 5, 2, 4

✓ Uporządkuj dane: 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6

✓ Średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{6+3+5+4+3+6+5+2+4}{9} = \frac{38}{9} \approx 4,22$$

✓ Mediana: środkowa wartość (5-ta ze 9) → 4

✓ Moda: 3, 4, 5, 6 (każda występuje 2 razy) → mamy więcej niż jedną modę.

✓ Rozstęp: $6 - 2 = 4$

8. CHECKLISTA PRZED ZADANIEM

- ☐ Czy znam definicje: średnia, mediana, moda?
- ☐ Czy dane są uporządkowane?
- ☐ Czy policzyłem wszystkie wartości?
- ☐ Czy wynik ma sens?
- ☐ Czy podałem jednostki?



PAMIĘTAJ!

Statystyka pomaga porządkować dane i wyciągać wnioski.

Ćwicz regularnie – to się przyda!





TABLICZKA

UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH



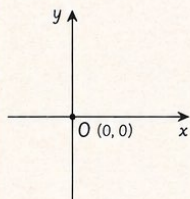
Wierz w siebie!
Dasz radę!



Układ współrzędnych pomaga opisywać i odnajdywać punkty w planie!

1. CO TO JEST UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH?

Układ współrzędnych to dwie prostopadłe osie: pozioma OX i pionowa OY, które przecinają się w punkcie $O = (0, 0)$.



OX - oś odciętych (pozioma)

OY - oś rzędnych (pionowa)

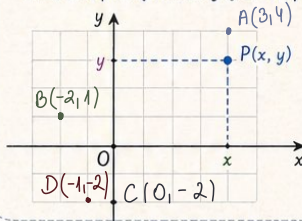
Punkt opisujemy parą liczb (x, y) , gdzie:

x - odczytujemy na osi OX

y - odczytujemy na osi OY

2. ODCZYTYWANIE PUNKTÓW

Punkt $P = (x, y)$ znajduje się w miejscu przecięcia prostej równoległej do OY poprowadzonej przez x (oraz prostej równoległej do OX poprowadzonej przez y).



PRZYKŁADY:

A (3, 4)

B (-2, 1)

C (0, -2)

D (-1, -2)

3. CWIARTKI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

II CWIARTKA

$x < 0, y > 0$
(przykład: $(-3, 2)$)

I CWIARTKA

$x > 0, y > 0$
(przykład: $(2, 3)$)

III CWIARTKA

$x < 0, y < 0$
(przykład: $(-2, -1)$)

IV CWIARTKA

$x > 0, y < 0$
(przykład: $(4, -2)$)

4. ODLEGŁOŚĆ MIĘDZY PUNKTAMI

Wzór na odległość między punktami

A (x_1, y_1) i B (x_2, y_2) :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

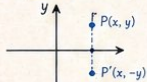
PRZYKŁAD:

A (1, 2) B (4, 6)

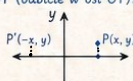
$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} \\ = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

5. SYMETRIA

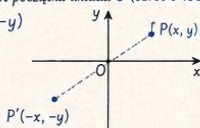
- symetria względem osi OX (odbicie w osi OX):
 $(x, y) \rightarrow (x, -y)$



- symetria względem osi OY (odbicie w osi OY):
 $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

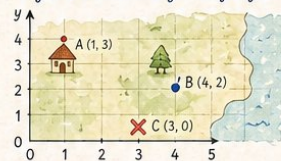


- symetria względem początku układu O (obróć o 180°):
 $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

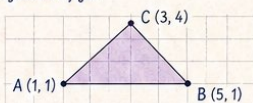


6. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

- Określanie położenia punktów na mapie, w grach, w zadaniach geometrycznych.



- Odnajdywanie punktów, liczenie odległości, rysowanie figur.



PAMIĘTAJ!

- ☒ Zawsze zapisuj punkt w nawiasie w postaci (x, y) .
- ☒ Najpierw poruszamy się w poziomie (oś OX), potem w pionie (oś OY).
- ☒ Oś OX - liczby w prawo są dodatnie, w lewo ujemne.
- ☒ Oś OY - liczby w górę są dodatnie, w dół ujemne.



NAJCZĘSTSZY BŁĄD!

Pomylenie kolejności współrzędnych!

Pamiętaj: (x, y) - najpierw x , potem y .



KĄT	ZAKRES	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
ostry	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+	+
rozwarty	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-	-



Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

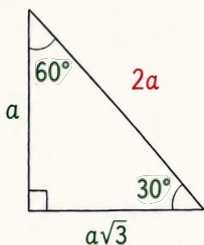
TABLICZKA WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW

Wierz w siebie!
Dasz radę!

♥ Dwa specjalne trójkąty prostokątne, które warto znać! ♥

1. TRÓJKĄT $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ ♥

To połowa trójkąta równobocznego.



STOSUNEK BOKÓW

(krótsza przyprostokątna = a)

$$a : a\sqrt{3} : 2a$$

krótsza przyprostokątna dłuższa przyprostokątna przeciwprostokątna

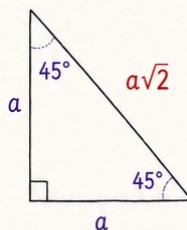
WZORY

- krótsza przyprostokątna = a
- dłuższa przyprostokątna = $a\sqrt{3}$
- przeciwprostokątna = $2a$



2. TRÓJKĄT $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ ♥

To połowa kwadratu (przekątna kwadratu).



STOSUNEK BOKÓW

(przyprostokątna = a)

$$a : a : a\sqrt{2}$$

przyprostokątna przyprostokątna przeciwprostokątna

WZORY

- przyprostokątna = a
- przeciwprostokątna = $a\sqrt{2}$



3. PRZYKŁADY ♥

PRZYKŁAD 1

Krótsza przyprostokątna ma 5 cm.
Oblicz pozostałe boki.



Obliczenia:

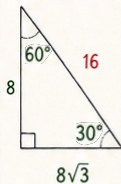
- dłuższa = $5\sqrt{3}$ cm
- przeciwprostokątna = 10 cm

Odpowiedź:

$5\sqrt{3}$ cm i 10 cm

PRZYKŁAD 2

Przeciwprostokątna ma 16 cm.
Oblicz przyprostokątne.



Obliczenia:

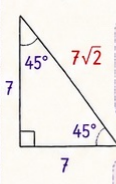
- krótsza = 8 cm
- dłuższa = $8\sqrt{3}$ cm

Odpowiedź:

8 cm i $8\sqrt{3}$ cm

PRZYKŁAD 3

Przyprostokątna ma 7 cm.
Oblicz przeciwprostokątną.



Obliczenia:

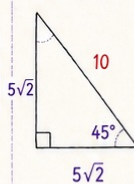
- przeciwprostokątna = $7\sqrt{2}$ cm

Odpowiedź:

$7\sqrt{2}$ cm

PRZYKŁAD 4

Przeciwprostokątna ma 10 cm.
Oblicz przyprostokątne.



Obliczenia:

- przyprostokątna = $10 : \sqrt{2}$ = $5\sqrt{2}$ cm

Odpowiedź:

$5\sqrt{2}$ cm i $5\sqrt{2}$ cm



4. JAK ROZPOZNAĆ?

- Jeśli w trójkącie prostokątnym jeden kąt ma 30° , drugi 60° → to trójkąt $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
- Jeśli oba kąty ostre mają 45° → to trójkąt $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$.

5. CO WARTO ZAPAMIĘTAĆ? ♥

- ✓ Zawsze jest to trójkąt prostokątny.
- ✓ Znajomość tych trójkątów ułatwia szybkie obliczenia.
- ✓ Stosunek boków jest stały – wystarczy znać jeden bok.
- ✓ Przydatne w zadaniach z geometrii i w trójkątach prostokątnych.

6. ZASTOSOWANIE ☆

- Obliczanie wysokości, odległości, długości odcinków.
- Zadania z Pitagorasem.
- Geometria w praktyce (np. nachylenie dachu, schody, trójkąty w naturze).

Powtarzaj
dziś –
zapamiętaj
na zawsze!



Mate kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA SKALA PODOBIEŃSTWA

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Skala podobieństwa pokazuje, ile razy jedna figura
jest powiększona lub pomniejszona w stosunku do drugiej.

1. CO TO JEST SKALA PODOBIEŃSTWA?

To stosunek odpowiadających sobie długości
w dwóch podobnych figurach.

ZAPIS SKALI PODOBIEŃSTWA:

$$k = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = \dots$$

gdzie:

k – skala podobieństwa

$k > 1$ – powiększenie

$0 < k < 1$ – pomniejszenie

$k = 1$ – figura nie zmienia rozmiaru

2. JAK DZIAŁA SKALA?

- $k > 1 \rightarrow$ figura jest powiększona
- $0 < k < 1 \rightarrow$ figura jest pomniejszona
- $k = 1 \rightarrow$ figura jest taka sama

PRZYKŁAD:

Jeśli $k = 3$, to wszystkie długości
w drugiej figurze są 3 razy większe.

Jeśli $k = \frac{1}{2}$, to wszystkie długości
w drugiej figurze są 2 razy mniejsze.

3. CO SIĘ ZMIENIA A CO NIE?

- ☒ ZMIENIA SIĘ:
długości boków, obwód, pole, objętość
- ☒ NIE ZMIENIA SIĘ:
kształt figur, miary kątów



PAMIĘTAJ!

Figury podobne mają takie same kąty,
a ich boki są proporcjonalne.

4. WZORY – JAK LICZYĆ?

DŁUGOŚCI

$$k = \frac{\text{długość w figurze 2}}{\text{długość w figurze 1}}$$

$$d_2 = k \cdot d_1 \quad \text{lub} \quad d_1 = \frac{d_2}{k}$$

gdzie d – odpowiadające sobie boki



POLA FIGUR PŁASKICH

Pola zmieniają się w k^2 razy.

$$P_2 = k^2 \cdot P_1 \quad \text{lub} \quad P_1 = \frac{P_2}{k^2}$$

gdzie P – pole figury

- $k = 2 \rightarrow$ pole 4 razy większe
- $k = \frac{1}{2} \rightarrow$ pole 4 razy mniejsze

OBJĘTOŚCI FIGUR PRZESTRZENNYCH

Objętości zmieniają się w k^3 razy.

$$V_2 = k^3 \cdot V_1 \quad \text{lub} \quad V_1 = \frac{V_2}{k^3}$$

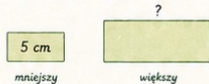
gdzie V – objętość figury

- $k = 2 \rightarrow$ objętość 8 razy większa
- $k = \frac{1}{2} \rightarrow$ objętość 8 razy mniejsza



PRZYKŁAD 1 – DŁUGOŚCI

Dwa podobne prostokąty mają skalę $k = 3$.
Dłuższy bok mniejszego prostokąta ma 5 cm.
Ile cm ma odpowiadający mu bok większego?

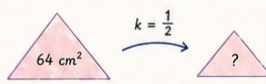


$$k = 3 \rightarrow d_2 = k \cdot d_1 = 3 \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

Odpowiedź: 15 cm

PRZYKŁAD 2 – POLE

Dwa podobne trójkąty mają skalę $k = \frac{1}{2}$.
Pole większego trójkąta wynosi 64 cm².
Jakie jest pole mniejszego trójkąta?

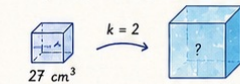


$$P_2 = k^2 \cdot P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 64 = \frac{1}{4} \cdot 64 = 16 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź: 16 cm²

PRZYKŁAD 3 – OBJĘTOŚĆ

Śześcian i jego model mają skalę $k = 2$.
Objętość modelu (mniejszego) wynosi 27 cm³.
Jaka jest objętość dużego śześcianu?



$$V_2 = k^3 \cdot V_1 = 2^3 \cdot 27 = 8 \cdot 27 = 216 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: 216 cm³

6. WAŻNE WSKAZÓWKI

- ☒ Sprawdź, które boki (lub krawędzie) są odpowiadające sobie.
- ☒ Policz skalę k z długości (zawsze od mniejszej do większej).
- ☒ Pamiętaj: pole $\rightarrow k^2$, objętość $\rightarrow k^3$.
- ☒ Zawsze zapisz jednostkę w odpowiedzi!

7. SZYBKA ŚCIĄGA

CO ZMIENIAMY?	JAK?	PRZYKŁAD DLA $k = 2$
DŁUGOŚCI	$\cdot k$	5 cm $\rightarrow$ 10 cm
POLE	$\cdot k^2$	5 cm ² $\rightarrow$ 20 cm ²
OBJĘTOŚĆ	$\cdot k^3$	5 cm ³ $\rightarrow$ 40 cm ³

8. CHECKLISTA

- ☐ Czy figury są podobne?
- ☐ Czy ustaliłem skalę k ?
- ☐ Czy odpowiednie boki są dobrane?
- ☐ Czy użyłem właściwego wzoru?
- ☐ Czy wynik ma jednostkę?



≡ TABLICZKA ≡

SPOSÓB PROPORCJI

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Proporcja to porównanie dwóch wielkości.

1. CO TO JEST PROPORCJA? ♥

Proporcja to równość dwóch stosunków.

$$a : b = c : x$$

czyli:

„a ma się do b tak jak c do x”

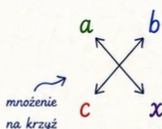
2. ZASADA - MNOŻENIE NA KRZYŻ ♥

W proporcji iloczyn skrajnych wyrazów jest równy iloczynowi środkowych wyrazów.

$$a : b = c : x \Rightarrow a \cdot x = b \cdot c$$

Stąd:

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$



3. KIEDY UŻYWAĆ PROPORCJI? ♥

Proporcje stosujemy m.in. w zadaniach z:

- ♥ procentami
- ♥ skalą i mapami
- ♥ zamianami jednostek
- ♥ zadaniami „ile z czego”
- ♥ mieszkankami, stężeniami



PAMIĘTAJ!

Figury podobne mają takie same kąty, a ich boki są proporcjonalne.

PRZYKŁAD 1: PROCENT Z LICZBY ♥

Ile to 20% z 150?

$$\begin{array}{l} 100\% \rightarrow 150 \\ 20\% \rightarrow x \end{array}$$

PROPORCJA

$$100 : 150 = 20 : x$$

LICZYMY

$$x = \frac{150 \cdot 20}{100} = \frac{3000}{100} = \underline{\underline{30}}$$

ODPOWIEŹ: 30 ♥

PRZYKŁAD 2: ZNAJDŹ LICZBĘ ♥

30% liczby to 45. Ile to liczba?

$$\begin{array}{l} 30\% \rightarrow 45 \\ 100\% \rightarrow x \end{array}$$

PROPORCJA

$$30 : 45 = 100 : x$$

LICZYMY

$$x = \frac{45 \cdot 100}{30} = \frac{4500}{30} = \underline{\underline{150}}$$

ODPOWIEŹ: 150 ♥

PRZYKŁAD 3: PROCENT ♥

45 z 150 to ile procent?

$$\begin{array}{l} 150 \rightarrow 100\% \\ 45 \rightarrow x \end{array}$$

PROPORCJA

$$150 : 100 = 45 : x$$

LICZYMY

$$x = \frac{45 \cdot 100}{150} = \frac{4500}{150} = \underline{\underline{30}}$$

ODPOWIEŹ: 30% ♥

NA CO ZWRACAĆ UWAGĘ? ☆

- ✓ Zawsze ustawiaj proporcję tak, aby odpowiadające sobie wielkości były po przekątnej.
- ✓ Procenty ustawiaj naprzeciwko procentów, liczby naprzeciwko liczb.
- ✓ Sprawdź wynik i jednostki!



NAJCZĘSTSZY BŁĄD! ❗

Źle ustawiona proporcja.

Zawsze dokładnie sprawdź, co do czego ma się odnosić!



PAMIĘTAJ! ♥

Ćwicz regularnie, a zobaczysz rezultaty!



PLAN

zaplanyj swoją naukę



ANALIZA

wyciągaj wnioski



SPRAWDŹ

kontroluj swoją wiedzę



ZAPAMIĘTAJ

kluczowe rzeczy



POŁĄCZ

łącz fakty i zagadnienia



WYTRWAJ

systematyczność to klucz

Małe kroki
dziś – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA PROCENTÓW

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze wzory, które warto znać!

1. PROCENT Z LICZBY

Aby obliczyć p% liczby a, mnożymy tę liczbę przez p% (czyli $\frac{p}{100}$).

$$p\% \text{ z } a = a \cdot \frac{p}{100}$$

PRZYKŁAD: ☆

$$20\% \text{ z } 150 = 150 \cdot \frac{20}{100} = 30$$

$$75\% \text{ z } 80 = 80 \cdot \frac{75}{100} = 60$$

2. LICZBA NA PODSTAWIE PROCENTU

Jeśli p% danej liczby to a, to cała liczba wynosi:

$$a = \frac{a \cdot 100}{p}$$

PRZYKŁAD: ☆

$$30\% \text{ liczby to } 45 \Rightarrow 45 = 30\% \cdot x$$

$$x = \frac{45 \cdot 100}{30} = 150$$

3. PROCENT PROCENTU

Aby obliczyć p% z q% liczby a, mnożymy a przez p% i przez q%.

$$p\% \text{ z } q\% \text{ z } a = a \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100}$$

PRZYKŁAD: ☆

$$20\% \text{ z } 50\% \text{ z } 200 =$$

$$200 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{50}{100} = 20$$

4. ZWIĘKSZANIE O PROCENT

Aby zwiększyć liczbę a o p%, mnożymy ją przez $(100\% + p\%)$.

$$a_{\text{nowe}} = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena 120 zł wzrasta o 15%:

$$120 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 138 \text{ zł}$$

5. ZMNIJSZANIE O PROCENT

Aby zmniejszyć liczbę a o p%, mnożymy ją przez $(100\% - p\%)$.

$$a_{\text{nowe}} = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena 200 zł obniżona o 10%:

$$200 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 180 \text{ zł}$$

6. O ILE PROCENT WIĘCEJ / MNIJ?

O ILE PROCENT WIĘCEJ?

Różnicę dzielimy przez wartość początkową i mnożymy przez 100%.

$$\frac{a_{\text{nowe}} - a_{\text{stare}}}{a_{\text{stare}}} \cdot 100\%$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena wzrosła z 80 zł do 100 zł.

$$\frac{100 - 80}{80} \cdot 100\% = 25\%$$

O ILE PROCENT MNIJ?

Różnicę dzielimy przez wartość początkową i mnożymy przez 100%.

$$\frac{a_{\text{nowe}} - a_{\text{stare}}}{a_{\text{stare}}} \cdot 100\%$$

PRZYKŁAD: ☆

Cena spadła z 120 zł do 90 zł.

$$\frac{120 - 90}{120} \cdot 100\% = 25\%$$

7. NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANE PROCENTY

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$50\% = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$75\% = \frac{75}{100} = 0,75$$

$$10\% = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$80\% = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$20\% = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$90\% = \frac{90}{100} = 0,9$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$100\% = \frac{100}{100} = 1$$

8. PROCENTY W PRAKTYCE

RABAT

Cena 250 zł
Rabat 20%

$$250 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 200 \text{ zł}$$

PODWYŻKA

Pensja 3000 zł
Podwyżka 8%

$$3000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 3240 \text{ zł}$$

PORÓWNIANIE

Liczba A = 60
Liczba B = 75

O ile % B jest większe od A?

$$\frac{75 - 60}{60} \cdot 100\% = 25\%$$

9. PAMIĘTAJ!

- ✓ Zawsze czytaj uważnie treść zadania.
- ✓ Zwróć uwagę na jednostki (zł, %, kg itd.).
- ✓ Sprawdź, czego szukasz: więcej, mniej czy ile %.
- ✓ Zapisz działanie i jednostkę w odpowiedzi!





Małe kroki
dzisiaj – wielkie
wyniki jutro!

TABLICZKA CECH PODZIELNOŚCI

Szybki sposób na sprawdzenie,
czy liczba jest podzielna przez...

Wierz w siebie!
Dasz radę!

PRZEZ 2

Liczba jest podzielna przez 2,
jeśli jej ostatnia cyfra
jest parzysta (0, 2, 4, 6, 8).



124 ✓ 2468 ✓
135 ✗ 9871 ✗

PRZEZ 3

Liczba jest podzielna przez 3,
jeśli suma jej cyfr jest
podzielna przez 3.

123 ✓ ($1+2+3=6$)
124 ✗ ($1+2+4=7$)

PRZEZ 4

Liczba jest podzielna przez 4,
jeśli jej dwie ostatnie cyfry
tworzą liczbę podzielną przez 4.

532 ✓ ($32 : 4 = 8$)
538 ✗ ($38 : 4 = 9 \text{ r. } 2$)

PRZEZ 5

Liczba jest podzielna przez 5,
jeśli jej ostatnia cyfra
to 0 lub 5.

245 ✓ 120 ✓
123 ✗ 748 ✗

PRZEZ 6

Liczba jest podzielna przez 6,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 2 i przez 3.

132 ✓ (parzysta i $1+3+2=6$)
134 ✗ (parzysta, ale $1+3+4=8$)

PRZEZ 8

Liczba jest podzielna przez 8,
jeśli jej trzy ostatnie cyfry
tworzą liczbę podzielną przez 8.

1576 ✓ ($576 : 8 = 72$)
1570 ✗ ($570 : 8 = 71 \text{ r. } 2$)

PRZEZ 9

Liczba jest podzielna przez 9,
jeśli suma jej cyfr jest
podzielna przez 9.

126 ✓ ($1+2+6=9$)
127 ✗ ($1+2+7=10$)

PRZEZ 10

Liczba jest podzielna przez 10,
jeśli jej ostatnia cyfra
to 0.

230 ✓ 1050 ✓
231 ✗ 1051 ✗

PRZEZ 12

Liczba jest podzielna przez 12,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 3 i przez 4.

144 ✓ (3 i 4)
150 ✓ (3 i 4)
142 ✗ (3, ale nie 4)

PRZEZ 14

Liczba jest podzielna przez 14,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 2 i przez 7.

98 ✓ (parzysta i $98 : 7 = 14$)
196 ✓ (parzysta i $196 : 7 = 28$)
100 ✗ (parzysta, ale $100 : 7 \neq$)

PRZEZ 15

Liczba jest podzielna przez 15,
jeśli jest podzielna
jednocześnie przez 3 i przez 5.

150 ✓ (3 i 5)
135 ✓ (3 i 5)
152 ✗ (5, ale nie 3)

PRZEZ 16

Liczba jest podzielna przez 16,
jeśli jej cztery ostatnie cyfry
tworzą liczbę podzielną przez 16.

64256 ✓ ($4256 : 16 = 266$)
12340 ✗ ($2340 : 16 \neq$)

PRZYKŁAD ZADANIA

Zadanie 5. (2 pkt)

Wykaż, że dla każdej nieparzystej
liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$
jest podzielna przez 4.



Rozwiązanie

Krok 1. Rozpisanie podanej liczby.

Liczbę nieparzystą zapisujemy jako $2k + 1$
(gdzie k jest liczbą całkowitą).

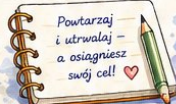
Podstawiając do wyrażenia $3n^2 + 2n + 7$,
otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (2k + 1)^2 + 2 \cdot (2k + 1) + 7 = \\ & = 3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 4k + 2 + 7 = \\ & = 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 2 + 7 = \\ & = 12k^2 + 16k + 12 = 4 \cdot (3k^2 + 4k + 3) \end{aligned}$$

Powtarzaj i utrwalał –
a osiągniesz
swoją cel!

Krok 2. Zakończenie dowodzenia.

Wartość wyrażenia $3k^2 + 4k + 3$ jest
dodatnia, a tym samym wyrażona
czwórka przed nawias oznacza,
że liczba jest jak najbardziej
podzielna przez 4, co należało
udowodnić.



Mate kroki
dzisiaj - wielkie
wyniki jutro!

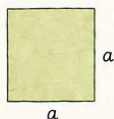
TABLICZKA FIGUR

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze wzory, które warto znać!

FIGURY PŁASKIE (2D)

KWADRAT ♥

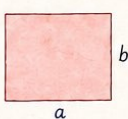


Obwód: $O = 4a$

Pole: $P = a^2$

a - długość boku

PROSTOKĄT ♥

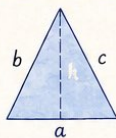


Obwód: $O = 2(a+b)$

Pole: $P = a \cdot b$

a - długość, b - szerokość

TRÓJKĄT ♥

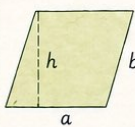


Obwód: $O = a + b + c$

Pole: $P = \frac{a \cdot h}{2}$

a - podstawa, h - wysokość

RÓWNOLEGŁOK ☆

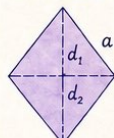


Obwód: $O = 2(a+b)$

Pole: $P = a \cdot h$

a - podstawa, h - wysokość

ROMB ♥

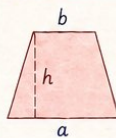


Obwód: $O = 4a$

Pole: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

d_1, d_2 - przekątne

TRAPEZ ♥

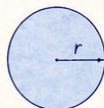


Obwód: $O = a + b + c + d$

Pole: $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

a, b - podstawy,
 h - wysokość

KOŁO ☆



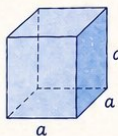
Obwód (okrąg): $O = 2\pi r$

Pole: $P = \pi r^2$

r - promień,
 $\pi \approx 3,14$

FIGURY PRZESTRZENNE (3D)

SZESZCIAN ♥

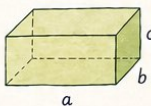


Pole powierzchni:
 $P = 6a^2$

Objętość:
 $V = a^3$

a - długość krawędzi

PROSTOKĄDŁOŚCIAN ☆

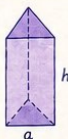


Pole powierzchni:
 $P = 2(ab + ac + bc)$

Objętość:
 $V = a \cdot b \cdot c$

a - długość, b - szerokość,
 c - wysokość

GRANIASTOŁUP PRAWIDŁOWY (TRÓJKĄTNY)



Pole podstawy:
 $P_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Pole powierzchni
całkowitej:
 $P_c = 2P_p + \text{obwód podstawy} \cdot h$

Objętość:
 $V = P_p \cdot h$

a - bok podstawy,
 h - wysokość

GRANIASTOŁUP PRAWIDŁOWY (CZWOROKĄTNY)



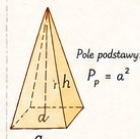
Pole podstawy:
 $P_p = a^2$

Pole powierzchni
całkowitej:
 $P_c = 2a^2 + 4ah$

Objętość:
 $V = a^2 \cdot h$

a - bok podstawy,
 h - wysokość

OSTROŚŁUP PRAWIDŁOWY (CZWOROKĄTNY)



Pole podstawy:
 $P_p = a^2$

Pole podstawy:
 $P_p = a^2$

Pole powierzchni
całkowitej:
 $P_c = P_p + 2a \cdot l$

Objętość:
 $V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

a - bok podstawy,
 l - apotema,
 h - wysokość

PRZYDATNE INFORMACJE ♥

♥ Jednostki pola:
 $\text{mm}^2, \text{cm}^2, \text{dm}^2, \text{m}^2, \text{km}^2$

$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$ $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$
 $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$

♥ Jednostki objętości:
 $\text{mm}^3, \text{cm}^3, \text{dm}^3, \text{m}^3$

$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$

♥ Pamiętaj o jednostkach
w odpowiedzi!

Wynik bez jednostki
jest niepełny.



PAMIĘTAJ! ♥

- ✓ Zawsze czytaj uważnie treść zadania.
- ✓ Zaznacz dane na rysunku.
- ✓ Wybierz odpowiedni wzór.
- ✓ Sprawdź wynik i jednostki.





TABLICZKA WIELOKĄTY I STEREOMETRIA



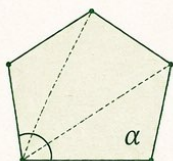
Najważniejsze wzory do zapamiętania! ♥

1. WIELOKĄTY

1. SUMA KĄTÓW

$$\alpha = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

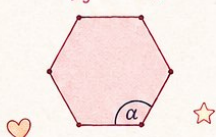
n - liczba boków



2. KĄT W WIELOKĄCIE FOREMNYM

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

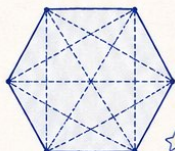
n - liczba boków
(wszystkie boki i kąty równe)



3. LICZBA PRZEKĄTNYCH

$$k = \frac{n(n - 3)}{2}$$

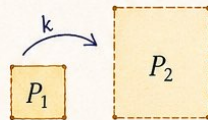
k - liczba przekątnych
 n - liczba boków



4. STOSUNEK PÓŁ FIGUR PODOBNYCH

$$P_2 = k^2 \cdot P_1$$

k - skala podobieństwa
(pole zmienia się z kwadratem skali)



2. STEREOMETRIA

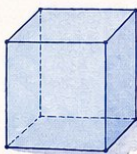
1. GRANIASTOŚŁUP

(w podstawie n - kąt)

$$w = 2n$$

$$k = 3n \quad s = n + 2$$

w - liczba wierzchołków
 k - liczba krawędzi
 s - liczba ścian



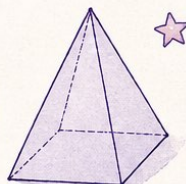
2. OSTROŚŁUP

(w podstawie n - kąt)

$$w = n + 1$$

$$k = 2n \quad s = n + 1$$

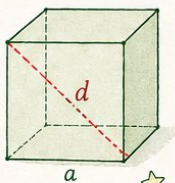
w - liczba wierzchołków
 k - liczba krawędzi
 s - liczba ścian



3. PRZEKĄTNA SZEŚCIANU

$$d = a\sqrt{3}$$

d - długość przekątnej
 a - krawędź sześcianu



4. SZEŚCIAN - WZORY

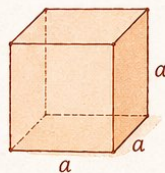
OBJĘTOŚĆ

$$V = a^3$$

POLE CAŁKOWITE

$$P = 6a^2$$

a - krawędź sześcianu



PAMIĘTAJ!

- ✓ n to liczba boków podstawy (w stereometrii)
- ✓ wzory często pojawiają się na egzaminie
- ✓ najpierw rozpoznaj figurę, potem zastosuj wzór



♥ Matematyka to nie tylko wzory - to sposób myślenia! ♥



TABLICZKA POTĘG LICZB

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Najważniejsze potęgi, które warto znać!

POTĘGI LICZBY 2

2^0	=	1
2^1	=	2
2^2	=	4
2^3	=	8
2^4	=	16
2^5	=	32
2^6	=	64
2^7	=	128
2^8	=	256
2^9	=	512
2^{10}	=	1024

POTĘGI LICZBY 3

3^0	=	1
3^1	=	3
3^2	=	9
3^3	=	27
3^4	=	81
3^5	=	243
3^6	=	729

POTĘGI LICZBY 4

4^0	=	1
4^1	=	4
4^2	=	16
4^3	=	64
4^5	=	256

POTĘGI LICZBY 5

5^0	=	1
5^1	=	5
5^2	=	25
5^3	=	125
5^4	=	625

POTĘGI LICZBY 6

6^0	=	1
6^1	=	6
6^2	=	36
6^3	=	216

PAMIĘTAJ!

- ✓ Każda liczba (różna od zera) podniesiona do potęgi 0 jest równa 1.
- ✓ Im większa potęga, tym większa wartość wyniku.
- ✓ Warto znać te potęgi na pamięć – często przydają się w zadaniach!



Matematyka to nie tylko liczby – to sposób myślenia!



TABLICZKA

POTĘGI i PIERWIASTKI



POTĘGI DO KWADRATU (2)

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$

POTĘGI DO SZEŚCIANU (3)

$1^3 = 1$	$4^3 = 64$
$2^3 = 8$	$5^3 = 125$
$3^3 = 27$	$6^3 = 216$



Regularna nauka
to klucz do
sukcesu!

PIERWIASTKI KWADRATOWE

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{289} = 17$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{324} = 18$
$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{400} = 20$

PIERWIASTKI SZEŚCIENNE

$\sqrt[3]{1} = 1$
$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[3]{64} = 4$
$\sqrt[3]{125} = 5$
$\sqrt[3]{216} = 6$
$\sqrt[3]{343} = 7$
$\sqrt[3]{512} = 8$
$\sqrt[3]{729} = 9$
$\sqrt[3]{1000} = 10$

TABLICZKA MNOŻENIA

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



GRATULACJE!

Mate kroki
dziś – wielkie
wyniki **jutro!**

Dotarłeś do końca!

Wierz w siebie!
Dasz radę!

Wykorzystaj zdobytą wiedzę, **wierz w siebie**
i **działaj** krok po kroku.

Powodzenia na maturze!

PAMIĘTAJ

- Regularna nauka to klucz do sukcesu.
- Powtarzaj materiał – to utrwala wiedzę.
- Rozwiązuj zadania – praktyka czyni mistrza.
- Zadbaj o odpoczynek i motywację.
- Wszystko, czego potrzebujesz, masz w sobie!

„Przyszłość należy do tych,
którzy wierzą w piękno swoich marzeń.”
– Eleanor Roosevelt



DZIĘKUJĘ,

POWODZENIA NA MATURZE!